

مبادئ الضوء الموجي والكمي

( مفاهيم وتطبيقات )

**Principles of Wave and Quantum Optics**

(Concepts and Applications)

تأليف

ا.د / عبدالهادي محمد حمدان البرغوثي

استاذ الفيزياء - جامعة القدس- فلسطين (سابقا) .

استاذ الفيزياء - جامعة ام القرى - مكة المكرمة ( سابقا) .

الطبعة الأولى

2020م - 1441هـ



©

حقوق الطبع محفوظة للمؤلف

إهداء.....

لى زوجتي وابنتي العزيزتين

## الفهرس

7	مقدمة الكتاب.....
9	الفصل الأول: انتشار الضوء.....
9	(1.1) طبيعة الضوء.....
10	(1.2) الثوابت الكهربية وسرعة الضوء.....
13	(1.3) الموجات المستوية التوافقية وسرعة الطور.....
16	(1.4) طرق بديلة لتمثيل الأمواج التوافقية.....
17	(1.5) سرعة المجموعة.....
21	تمارين.....
22	الفصل الثاني: الطبيعة الإتجاهية للضوء.....
22	(2.1) ملاحظات عامة.....
25	(2.2) جريان الطاقة الكهرومغناطيسية : متجه بوينتج.....
27	(2.3) الإستقطاب.....
31	(2.4) الإستقطاب الدائري والبيضاوي.....
36	(2.5) تمثيل الإستقطاب بالمصفوفات.....
44	(2.6) الإنعكاس وألإنكسار عند المستوى الفاصل.....
47	(2.7) سعات الموجات المنعكسة والمنكسرة.....
56	(2.8) الموجة المتلاشية ( المضمحلة ) في الإنعكاس الكلي.....
57	(2.9) تغيرات الطور في الإنعكاس الداخلي الكلي.....
62	الفصل الثالث: التطاور والتداخل.....
63	(3.1) قاعدة التراكم الخطي.....
64	(3.2) تجربة يونج.....
68	(3.3) مقياس ميكلسون التداخلي.....
70	(3.4) نظرية التطاور الجزئي.....
74	(3.5) زمن وطول التطاور.....
77	(3.6) التحليل الطيفي لقطار موجي محدود: التطاور واتساع خط الطيف.....
81	(3.7) التطاور المكاني.....
85	(3.8) مطياف تحويل فوريه.....
87	تمارين.....
89	الفصل الرابع: تداخل الشعاع المتعدد.....
89	(4.1) تداخل الأشعة المتعددة.....
94	(4.2) مقياس تداخل فابري- بيرو.....

96.....	(4.3) تفريق جهاز فابري- بيرو.....
99.....	(4.4) نظرية الأغشية متعددة الطبقات.....
105.....	تمارين .....
107.....	الفصل الخامس :الحيود.....
107.....	(5.1) مقدمة.....
108.....	(5.2) النظرية الأساسية .....
113.....	(5.3) حيود فرنهوفر وحيود فرينل.....
115.....	(5.4) حيود فرنهوفر.....
130.....	(5.5) انماط حيود فرينل.....
143.....	(5.6) تطبيقات تحويل فوريه في الحيود.....
151.....	(5.7) اعادة بناء مقدمة الموجة بالحيود - التصوير الهلوجرافي .....
154.....	تمارين .....
157.....	الفصل السادس : انتشار الضوء في الأوساط المادية .....
157.....	(6.1) مقدمة.....
157.....	(6.2) المجالات العيانية ومعادلات ماكسويل.....
159.....	(6.3) معادلة الموجة العامة.....
160.....	(6.4) انتشار الضوء في الأوساط العازلة متماثلة المناحي – التشتت .....
165.....	(6.5) انتشار الضوء في الأوساط الموصلة .....
169.....	(6.6) الإنعكاس والإمتصاص عند حدود وسط امتصاصي.....
174.....	(6.7) انتشار الضوء في البلورات.....
186.....	(6.8) الإنكسار المزدوج عند الحدود.....
190.....	(6.9) الفعالية الضوئية.....
196.....	(6.10) دوران فارادي في الجوامد .....
198.....	(6.11) الظواهر البصرية - المغناطيسية والبصرية – الكهربائية .....
201.....	تمارين .....
203.....	الفصل السابع: الإشعاع الحراري.....
203.....	(7.1) الإشعاع الحراري .....
203.....	(7.2) قانون كيرشوف - الجسم الأسود .....
206.....	(7.3) انماط الإشعاع الكهرومغناطيسي في فجوة .....
209.....	(7.4) النظرية الكلاسيكية لإشعاع الجسم الأسود : قانون ريلي – جينز .....
210.....	(7.5) اشعاع الفجوة المكتم .....
211.....	(7.6) احصائية الفوتون – قانون بلانك.....
216.....	(7.7) الظاهرة الكهروضوئية .....

217.....	(7.8) زخم الفوتون - ضغط الإشعاع الضوئي
218.....	(7.9) الزخم الزاوي للفوتون
219.....	(7.10) طول موجة الجسيمات المادية - فرضية دي برولي
220.....	(7.11) قاعدة هيزنبرغ في الالتحديد
222.....	تمارين
224.....	الفصل الثامن : الأطياف الضوئية
224.....	(8.1) مقدمة
225.....	(8.2) نظرية الأطياف الذرية الابتدائية
230.....	(8.3) مبادئ ميكانيكا الكم
232.....	(8.4) معادلة شرودنجر
233.....	(8.5) ميكانيكا الكم لذرة الهيدروجين
240.....	(8.6) القفزات المشعة وقواعد الإنتقاء
244.....	(8.7) خطوط الطيف الدقيقة - لف الإلكترونات
245.....	(8.8) تعددية اطياف الذرات كثيرة الإلكترونات
248.....	(8.9) اطياف الجزينات
255.....	تمارين
257.....	الفصل التاسع :تضخيم الضوء - الليزر
257.....	(9.1) مقدمة
257.....	(9.2) الإنبعث المستحث و الإشعاع الحراري
259.....	(9.3) تضخيم الإشعاع في وسط ما
263.....	(9.4) طرق إنتاج مقلوب الإسكان
265.....	(9.5) اهتزازة الليزر
268.....	(9.6) نظرية الرنان الضوئي
274.....	(9.7) الليزرزات الغازية
279.....	تمارين
280.....	الفصل العاشر :البصريات اللاخطية
280.....	(10.1) مقدمة
280.....	(10.2) الأوساط البصرية اللاخطية
284.....	(10.3) البصريات اللاخطية من الرتبة الثانية
293.....	(10.4) البصريات اللاخطية من الرتبة الثالثة
307.....	تمارين
308.....	المراجع

## مقدمة الكتاب Preface

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على رسول الله خاتم الأنبياء والمرسلين ، وبعد .

بالرغم من ان مفاهيم الضوء كانت معروفة منذ العصور القديمة ، لكن توظيف هذه المعرفة لخدمة الحياة البشرية بشكل ملموس لم يتحقق حتى الحقبة الزمنية غير البعيدة ، وذلك بعد التقدم العلمي والتقني في المجالات العملية . وعليه ، اصبح لزاما على المختصين في مجالات البحث العلمي مراجعة النظريات البصرية ووصياغتها بحيث يمكن تطبيق هذه النظريات في مجالات متعددة من العلوم التطبيقية والتكنولوجية : الهندسة بشتى فروعها ، التصوير الطبي ، وسائل الإتصالات الحديثة ، وابحاث غزو الفضاء ،... الخ. وبناء على ذلك ، لم يعد دور نظريات الضوء مقتصرًا على تصميم وتطوير العدسات والمرابا ( الضوء الهندسي) ، وان كان هذا الدور اساسيا في تصميم الأجهزة البصرية الحديثة ، بل تخطى ذلك الى اوسع من ذلك . وحديثا، كان لتطوير وانتاج إشعة الليزر بأطوال موجية متعددة الدور المحوري لخلق ترابط قوي بين علم الضوء والعلوم الأخرى . وهذا اتاح المجال امام الباحثين لدراسة خواص المواد بشكل دقيق ودراسة تفاعلها مع الضوء ، مما ساهم في التعرف على التركيب الذري والجزيئي لبلورات هذه المواد، وهذا ما سيتوضح في فصول هذا الكتاب .

وبناء على ما تقدم ، فقد رأى المؤلف ان من الأهمية بمكان ضرورة تزويد المكتبات العربية ( خصوصا المكتبات الجامعية ) بكتاب علمي يشرح هذه النظريات البصرية ووضعتها في مجال التطبيق العملي بلغة علمية وبمعادلات مبسطة ، بدون التركيز على الإشتقاق الرياضي الذي يشوش اذهان الطلبة ويبعدهم عن إكتساب المهارات التطبيقية المرجوة ، حيث تم شرح المفاهيم البصرية باللغة العربية ، بينما صيغت المعادلات الرياضية باللغة الإنجليزية . وبذلك يتمكن الطالب الجامعي ، في اقسام الفيزياء ، او الهندسة الكهربائية وفروعها المختلفة ، وكذلك طلبة العلوم التطبيقية الأخرى ذات الصلة ، من متابعة المفاهيم الضوئية في كافة المراجع الأخرى باللغة الإنجليزية اثناء دراسته الجامعية المتقدمة . ولفهم دراسة هذا المقرر الجامعي ، ينصح الطلبة بدراسة مقررات علمية ورياضية تمهيدية قبل التسجيل في هذا المقرر ، مثل مقررات التفاضل والتكامل ، حل المعادلات التفاضلية العادية والجزيئية ، ومقرر النظرية الكهرومغناطيسية .

يحتوي هذا الكتاب على عشرة فصول ، حيث تتناولت الفصول الستة الأولى النظريات الأساسية للضوء الموجي وتطبيقات هذه النظريات في المجالات العلمية ، بينما احتوت الفصول الأربعة الأخرى على المبادئ الأساسية للضوء الكمي واعطت وصفا لتطبيق هذه المبادئ في دراسة الأطياف الذرية والجزيئية للمواد . في الفصول التسعة الاولى من هذا الكتاب ، افترض ان الوسط المادي الذي ينتشر فيه الضوء يكون متجانسا وخطيا ، بينما تم تخصيص الفصل الأخير لدراسة خصائص الأوساط اللاخطية ، وهو ما يعرف **بالبصريات اللاخطية** . ويعزى تطور هذا الفرع من فروع الضوء حديثا الى اكتشاف اشعة الليزر وتفاعل هذه الأشعة ذات الشدة العالية مع هذه ذرات الأوساط المادية .

تفصيلا ، احتوى الفصل الأول من هذا الكتاب على المفاهيم الأساسية لطبيعة الموجات الضوئية وكيفية انتشارها في الوسط المادي (او الفراغ) على صورة موجات كهرومغناطيسية ( مجالات كهربية ومغناطيسية) ، ويتحدد انتشارها في الوسط بعلاقات **ماكسويل** . كما تناول الظواهر السلوكية للضوء اثناء انتشاره في الأوساط المادية المختلفة : مفهوم الطور وسرعة المجموعة . بينما اشتمل الفصل الثاني على مناقشة الطبيعة الإتجاهية للضوء ، وذلك بدراسة ظاهرة الإستقطاب للموجات الضوئية بطريقة رياضية ، التي تعتمد على مصفوفات **جونز**. كما يقدم الفصل الثالث المفهوم الفيزيائي الأساسي في دراسة التداخل ( او تراكب) بين الموجات الضوئية وهو مبدأ التطاور الجزئي وطول هذا التطاور. كما تناول هذا الفصل الملخص الرياضي لتحويل فورييه وتطبيقاته العملية . فيما يشرح الفصل الرابع مبدأ التداخل بين الأشعة الضوئية المتعددة في حالة استخدام اجهزة التداخل المعروفة : **مطياف فابري - بيرو** ، والأغشية الرقيقة ذات الطبقات المتعددة . اما في الفصل الخامس ، فقد تمت مناقشة ظاهرة حيود الموجات المستوية والكروية بطريقة رياضية ، كما قدم هذا الفصل اسس تقنية

التسجيل الضوئي الكامل لجسم ما ( الهولوغرام ) ، والتي تعتمد اساسا على مبدأ حيود الأمواج الضوئية . كما احتوى الفصل السادس على دراسة السلوك الضوئي في الأوساط البلورية الصلبة ، بحيث تناولت هذه الدراسة المجالات العيانية ومعادلات ماكسويل ، ومعادلة الموجة العامة وحلها الرياضي في حالة الأوساط المادية المتماثلة المناحي والأوساط الموصلة ، وما يتبع ذلك من تغيرات وظواهر سلوكية للموجات الضوئية عند السطوح الفاصلة بين هذه الأوساط المادية. كما عرضت في هذا الفصل عدة ظواهر : ظاهرة الإنكسار المزدوج الناجم عن مرور الضوء في البلورات غير متماثلة المناحي ، الظاهرة البصرية - الكهربائية والظاهرة البصرية - المغناطيسية .

كما احتوى الفصل السابع على تطور نظريات ميكانيكا الكم ، ابتداء من الإشعاع الحراري للجسم الأسود المثالي والقوانين التي تتحكم في هذا الإشعاع : قانون ريلي - جينز ، وقانون بلانك ، وإحصاء الفوتونات المكونة لهذا الإشعاع . أيضا ، تناول هذا الفصل فرضية دي برولي للجسيمات المادية و مبدأ اللاتحديد لهيزنبرغ الذي يعتبر بداية لنظريات الميكانيكا الكمية المتقدمة . كما احتوى الفصل الثامن على خصائص الأطياف الذرية ، وتناول الصورة الرياضية لمعادلة شرودنجر وطريقة حلها الرياضي في حالة ذرة الهيدروجين والذرات كثيرة الإلكترونات . كما استعرض قواعد انتقاء القفزات بين مستويات الطاقة لهذه الذرات وما ينتج عنها من متسلسلات الخطوط الطيفية المعروفة بأسماء العلماء الباحثين في هذا المجال . و يعرض الفصل التاسع في هذا الكتاب مبدأ تضخيم الضوء لإنتاج ما يعرف حاليا بشعاع الليزر ، كما يتناول تقنيات الحصول على هذا الشعاع بأطوال موجية متنوعة ، و يشرح نظريات الرنانة الضوئية وطرق تصميمها ، مما أسفر عن إنتاج العديد من انواع الليزر الصلبة والغازية .

وأخيرا ، تناول الفصل العاشر تفاعل شعاع الليزر ذو الشدة العالية مع مكونات الوسط المادي ، وهذا يعرف حاليا بالبصريات اللاخطية والتي تعتبر فرعا جديدا من فروع الضوء الحديث . كما يعرض معالجة رياضية لخلط الموجات الثلاثي والرابعي ، وهذا أدى الى تطبيقات مهمة في مجال العلوم التكنولوجية مثل اجهزة التحكم والمراقبة الضوئية .

كما احتوى كل فصل من فصول هذا الكتاب على تمارين شاملة للمفاهيم الواردة في الفصل ، وهذا يتيح للطلاب القدرة الذهنية على فهم وتحليل النظريات الواردة في كل فصل من خلال الإطلاع على الكتب المرجعية في علم الضوء .

والله من وراء القصد .....

المؤلف

إ.د / عبدالهادي محمد حمدان البرغوثي

عابود - رام الله - فلسطين



## الفصل الأول: انتشار الضوء Propagation of Light

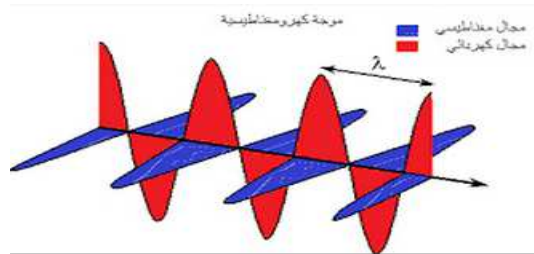
نقدم في هذا الفصل النظريات المتعلقة بطبيعة انتشار الضوء في الوسط المادي ، بإعتبار ان سلوك الضوء في الوسط حركة موجية توافقية ، كما نتناول سرعة انتشار هذه الموجات بدلالة ثوابت الوسط ، وتحديد سرعة الطور لهذه الموجات ، و نقدم طرقا اخرى لتمثيل الموجات التوافقية رياضيا .

### (1.1) طبيعة الضوء Nature of Light

لتفسير الظواهر الضوئية ( ظاهرة انعكاس وانكسار الشعاع الضوئي عند السطح الفاصل بين وسطين ماديين ) ، افترض العالم الفيزيائي إسحق نيوتن (1643-1727) ان هذا الشعاع يتكون من سيل من الجسيمات الدقيقة *Particles* والتي تنتشر في الوسط المتجانس بخطوط مستقيمة، وهذا يعرف بالانتشار الخطي *rectilinear propagation* ، واعتبر ان ظاهرة تكوين الظلال دليلا على ذلك.

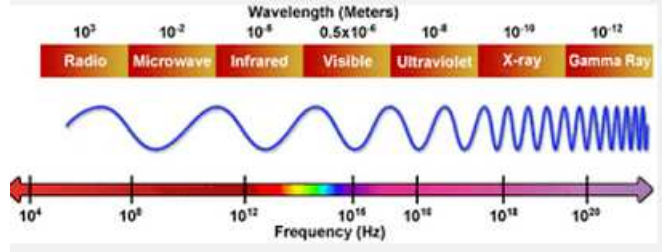
في نفس الوقت ، بين العالم هيجنز (1629-1695) ان الضوء ينتشر في الوسط على صورة حركة موجية *wave motion* ، وتكون مقدمة الموجات على هيئة سطوح كروية مركزها المصدر النقطي ، كما يكون اتجاه مسار الشعاع الضوئي باتجاه نصف القطر الخارج من مركز هذه الكرة . وينتشر الضوء في الوسط على اعتبار ان كل نقطة على هذا السطح الكروي تعمل كمصدر ضوئي جديد يعطي موجات كروية ثانوية *secondary wavelets*، ويكون السطح المغلف لهذه الموجات ممثلا لمقدمة الموجة الجديدة المنتشرة في الوسط مع مرور الزمن ، وهكذا تتم عملية انتشار الشعاع الضوئي في الوسط المادي. وسميت هذه بالنظرية الموجية للضوء والتي فسرت كثيرا من الظواهر الضوئية : الإنعكاس ، الإنكسار ، التداخل، وظاهرة حيود الشعاع الضوئي عند الفتحات الضيقة (كما سيرد تفصيل ذلك في الفصول اللاحقة من هذا الكتاب).

انطلاقا من ذلك ، افترض العالم الرياضي ماكسويل (1831-1879) ان الضوء ينتشر في الفراغ على هيئة امواج كهرومغناطيسية ، وهذه الامواج تتكون من مجالات كهربائية ومغناطيسية مترددة و تنتشر بشكل مترامن في الوسط ( الشكل 1.1).



شكل (1.1): موجة كهرومغناطيسية .

كما يمثل الضوء المرئي من طيف الإشعاع الكهرومغناطيسي ( الشكل 1.2 ) .



شكل (1.2) الطيف الكهرومغناطيسي.

في بداية القرن العشرين ، ظهرت نظرية الكم *Quantum Theory* والتي تعتبر ان الطاقة الكهرومغناطيسية تكون على صورة وحدات مكممة تسمى الكوانتا *quanta* ، اي ان المجال الكهرومغناطيسي هو كميات منفصلة *discrete* من الطاقة تعرف بالفوتونات *photons* . وعليه ، ظهرت النظرية الحديثة للضوء والتي تعتبر ان الضوء يمتلك خاصية ثنائية *Dual nature* ، وتدمج هذه النظرية ما بين النظرية الجسيمية للضوء ( نظرية نيوتن) والنظرية الموجية . واستطاعت هذه النظرية تفسير بعض الظواهر الضوئية ، مثل ظاهرة التداخل والحيود ، على اعتبار ان الضوء يسلك الصفة الموجية ، بينما لتفسير الظاهرة الكهروضوئية *photoelectric effect* ، يمكن اعتبار ان طبيعة الضوء هي طبيعة جسيمية .

وملخص القول ما يلي: لا يوجد جواب بسيط عند السؤال عن طبيعة وكيفية انتشار الضوء في الوسط ، وانما يمكن ان نفسر الظواهر الضوئية بإعتبار ان النظرية الكهرومغناطيسية لماكسويل تقدم وصفا لإنتشار الضوء ، بينما يمكن اعتبار ان النظرية الكمية تقدم وصفا آخر لتفاعل الضوء مع المادة ( ظاهرة امتصاص وانبعاث الضوء) . وتعرف النظرية الناتجة من ارتباط النظرية الكهرومغناطيسية مع النظرية الكمية بإسم نظرية الإلكتروديناميكية الكمية *Quantum Electro-dynamic Theory* .

## (1.2) الثوابت الكهربائية وسرعة الضوء *Electric Constants and the Speed of Light*

لوصف انتشار الموجة الكهرومغناطيسية عند اي نقطة في الفراغ ، الناتجة عن توزيع شحنات كهربية ( مستقرة او متحركة ) ، وضع ماكسويل اربعة معادلات رياضية والتي تعتبر اساسا في دراسة النظرية الكهرومغناطيسية . حيث تربط هذه المعادلات معا التغيرات المكانية والزمانية لشدتي المجالات الكهربائية والمغناطيسية في هذه الموجة . وتكون الصيغ الرياضية لهذه المعادلات كما يلي:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.4)$$

حيث:  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ henry/m}$  ، وتعرف بنفوذية الفراغ *permeability of vacuum* ، بينما  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ Farad/m}$  ، وتعرف بسماحية الفراغ *permittivity of vacuum* .

$\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  تمثل متجه المجالات الكهربائية و المغناطيسية في الموجة الكهرومغناطيسية على الترتيب (الشكل 1.1).

معادلة الموجة الكهرومغناطيسية :

لإشتقاق معادلة الموجة الكهرومغناطيسية ، نتبع الخطوات الرياضية التالية:

نأخذ التفاضل طرفي المعادلات (1.1) ، (1.2) ثم نعويض بدلالة التفاضل المجال المغناطيسي والمجال الكهربائي في الطرف الأيسر للمعادلات الناتجة لنحصل على ما يلي:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.5)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1.6)$$

باستخدام المتطابقة الإتجاهية التالية ومعادلات تباعد المجالات (1.3, 1.4) ، نجد ان :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 (\mathbf{A}) \quad (1.7)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} , \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1.8)$$

حيث :

$$c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} \quad (1.9)$$

وتعرف معادلة (1.8) بمعادلة الموجة الكهرومغناطيسية في الفراغ *Wave Equation*.

عند مقارنة هذه المعادلة مع معادلة الموجة الميكانيكية ( اهتزاز الأوتار ) ، نجد ان المقدار  $c$  يمكن ان يعبر عن سرعة انتشار الموجة الكهرومغناطيسية في الوسط . وعند التعويض بقيم الثوابت  $\epsilon_0$  ،  $\mu_0$  ، نجد ان :

$$c \approx 2.99784 \times 10^8 \text{ m/s}$$

من ناحية اخرى ، عند اعتبار سرعة انتشار الضوء ، منذ عام 1676 ، والتي اجراها العالم رومر *Romer* عند دراسته خسوف اقمار المشتري ، نجد ان قيمة  $c$  تتطابق مع هذه السرعة ضمن حدود خطأ القياس التجريبي . ومن هذه المقارنة استنتج ماكسويل ان طبيعة الضوء هي اضطراب كهرومغناطيسي ينتشر في الفراغ بسرعة الضوء السابقة. وتأكيدا على هذا الإستنتاج ، وجدت هيئة المقاييس الدولية في عام 1972 وباستخدام شعاع الليزر النتيجة التالية:

$$c = 299,792,456.2 \pm 1.1 \text{ m/s}$$

▪ سرعة الضوء في الوسط المادي:

في حالة انتشار الموجة الكهرومغناطيسية في الوسط المادي وغير الموصل ، نعرف سرعة انتشار هذه الموجة ،  $u$  ، كما يلي:

$$u = (\mu \epsilon)^{-1/2} \quad (1.11)$$

حيث  $\epsilon$  ،  $\mu$  هما سماحية ونفوذية الوسط ، وتعتمد قيمها على الخصائص الكهربائية والمغناطيسية لهذا الوسط. كما يمكن تعريف كميات تسمى بالسماحية النسبية للوسط ( ثابت العازل ) ،  $K$  ، كما يلي:

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (1.12)$$

وبالمثل ، تعرف النفوذية النسبية للوسط ،  $K_m$  ، كالتالي:

$$K_m = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (1.13)$$

وعليه ، تصبح سرعة الموجة الكهرومغناطيسية في الوسط المادي كما يلي:

$$u = (\mu\epsilon)^{-1/2} = (K_m\mu_0K\epsilon_0)^{-1/2} = c(KK_m)^{-1/2} \quad (1.14)$$

▪ معامل انكسار الوسط المادي :

تسمى النسبة بين سرعة الضوء في الفراغ الى سرعته في الوسط المادي بمعامل انكسار الضوء لهذا الوسط ،  $n$  ، اي ان

$$\frac{c}{u} = n = (KK_m)^{1/2} \quad (1.15)$$

وفي حالة الأوساط المادية الشفافة ( غير المغناطيسية ) ، فإن  $K_m = 1$  ، وعليه ،

$$n = \sqrt{K} \quad (1.16)$$

يعطي الجدول (1.1) مقارنة بين قيم معاملات الإنكسار للمواد المختلفة والمقاسة بالتجارب العملية ، في حالة الضوء الأصفر ، مع قيمها المناظرة والمحسوبة بإستخدام معادلة (1.16) .

Substance	$n$ (Yellow Light)	$\sqrt{K}$
Air (1 atm)	1.0002926	1.000295
CO <sub>2</sub> (1 atm)	1.00045	1.0005
Polystyrene	1.59	1.60
Glass*	1.5–1.7	2.0–3.0
Fused quartz	1.46	1.94
Water	1.33	9.0
Ethyl alcohol	1.36	5.0

جدول (1.1) مقارنة بين معاملات انكسار المواد للضوء الأصفر.

من هذا الجدول ، نلاحظ ان هناك توافقا جيدا بين قيم معاملات الإنكسار المتناظرة في حالة الغازات: الهواء وثاني اكسيد الكربون ، والمواد الصلبة غير المستقطبة ( بوليستيرين ) ، بينما يكون هذا التوافق ضعيفا في حالة الأوساط ذات الجزيئات المستقطبة : الماء والكحول .

### (1.3) الموجات المستوية التوافقية وسرعة الطور *Plane Harmonic Waves & Phase Velocity*

بإستخدام الإحداثيات الكارتيزية وبتحليل معادلة (1.8) الى مكوناتها ، نلاحظ ان كل مكون من مكونات متجه المجالات في الموجة الكهرومغناطيسية ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ) يحقق معادلة الموجة العددية *scalar wave equation* ، اي

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (1.17)$$

حيث  $U$  تمثل اي من مكونات المجالات الكهربائية والمغناطيسية:  $(E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)$ .

▪ موجات البعد الأحادي *waves in one dimension*

لنفرض ان التغير المكاني في  $U$  مقتصر على اتجاه محور  $z$  فقط، لذلك توول معادلة (1.17) الى الصورة التالية

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (1.18)$$

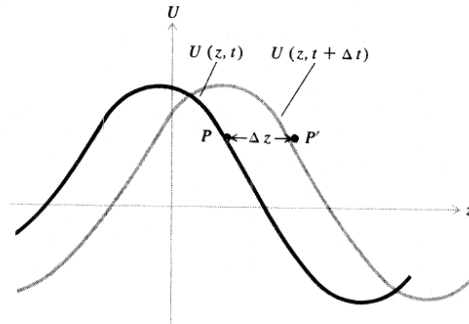
يكون حل هذه المعادلة التفاضلية كما يلي:

$$U(z,t) = U_0 \cos(kz - \omega t) \quad (1.19)$$

بشرط ان يتحقق ما يلي:

$$\frac{\omega}{k} = u \quad (1.20)$$

وتعتبر معادلة (1.19) حجر الأساس عند دراسة ظواهر الضوء: التداخل، الحيود والإستقطاب. وتعطي هذه المعادلة وصفا للحركة الإنتقالية للموجة التوافقية المستوية *plane harmonic wave* في الوسط. ويمكن تمثيل هذه المعادلة بيانيا كما في الشكل (1.4)



الشكل (1.4): منحنى دالة الموجة التوافقية المستوية.

من الشكل (1.4) ، نلاحظ ان دالة الموجة  $U(z,t)$  تتغير بشكل جيبي مع المسافة  $z$  ، وعند قيمة محددة من  $z$  فإن هذه الدالة تتغير توافيقا مع الزمن  $t$  . اما شكل انتقال دالة الموجة في الوسط ، فيمكن ان يمثل بمحنيات دالة الموجة ،

حيث يكون المنحنى الثاني في الشكل (1.4) منزاحا بإتجاه محور  $z$  الموجب بمقدار  $\Delta z$  ،  $U(z,t), U(z,t + \Delta t)$  ، وتعطي هذه المسافة البعد بين نقطتين :  $P, P'$  و اللتان لهما نفس الطور  $phase$  ، ولذلك تسمى  $u$  بسرعة الطور  $phase velocity$  . وتعرف ثوابت الموجة التوافقية ، في معادلة (1.19) ، كما يلي:

$U_0$  = سعة الموجة  $wave amplitude$  ،  $\omega$  = التردد الزاوي للموجة ،  $k$  = العدد الموجي الزاوي ،  $\lambda$  = طول الموجة = المسافة في اتجاه انتشار الموجة التي تقطعها هذه الموجة خلال زمن الدور للحركة التوافقية  $T$  ، وتكون كما يلي:

$$\lambda = uT = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{\sigma} \quad (1.21)$$

كما يعرف تردد الموجة  $frequency$  كالتالي:

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad (1.22)$$

### ▪ امواج في الأبعاد الثلاثة : *waves in Three Dimensions*

بالرجوع الى معادلة (1.17) ، وفي حالة الفراغ ، تكون الصورة الرياضية لدالة موجة الحركة التوافقية البسيطة كالتالي:

$$U(x,y,z,t) = U_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (1.23)$$

حيث  $\mathbf{r}$  = متجه الموقع  $position vector$  ، ويعطى بدلالة الإحداثيات الكارتيزية كما يلي :

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}}x + \hat{\mathbf{j}}y + \hat{\mathbf{k}}z$$

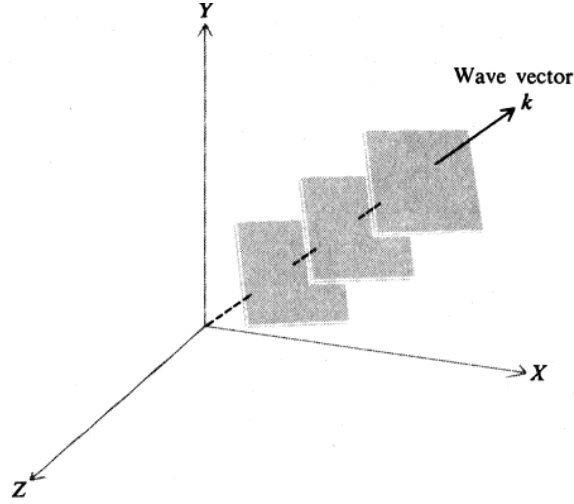
$\mathbf{k}$  متجه الانتشار  $propagation vector$  ، حيث يكون مقدار هذا المتجه كما يلي:

$$|\mathbf{k}| = k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} \quad (1.25)$$

في معادلة (1.23) ، يمكن اعتبار القيم الثابتة للمقدار:  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$  معرفة لمجموعة من المستويات في الفراغ ، وتسمى سطوح ثابت الطور *surfaces of constant phase* ، او

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t = \text{constant} \quad (1.26)$$

هذا يعني ان جيوب التمام الإتجاهية *directional cosines* لهذه المستويات تتناسب مع مكونات متجه الإنتشار  $\mathbf{k}$  ، كما ان هذا المتجه يمثل العمودي لسطح الموجات ( الشكل 1.5) .



شكل (1.5) سطوح تساوي الطور في الموجة المستوية .

كما يشير الحد الزمني في معادلة (1.26) الى ان سطوح هذه الأمواج تتحرك في اتجاه  $\mathbf{k}$  بسرعة مساوية لسرعة الطور ، اي

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \quad (1.27)$$

(1.4) طرق بديلة لتمثيل الأمواج التوافقية *Alternative ways of representing harmonic waves*



إذا فرضنا ان متجه وحدة ،  $\hat{n}$  ، بإتجاه انتشار الموجة ، حيث  $\mathbf{k} = k\hat{n}$  ، يمكن تحويل معادلة (1.23) الى الصورة التالية:

$$U(x, y, z, t) = U_0 \cos [(\hat{n} \cdot \mathbf{r} - ut)k]$$

كما يمكن بإستخدام معادلتني (1.21 ، 1.22) التعبير عن دالة الموجة التوافقية بالصورة التالية :

$$U(\mathbf{r}, t) = U_0 \cos[2\pi(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T})]$$

#### ▪ دالة الموجة المركبة *complex wave function*

بإستخدام الدالة الأسية (معادلة اويلر) :  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  ، نجد انه يمكن التعبير عن دالة الموجة التوافقية المستوية بدلالة الجزء الحقيقي للدالة الأسية (جيب التمام) ، اي

$$U = U_0 \Re[e^{i(k \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] \quad (1.28)$$

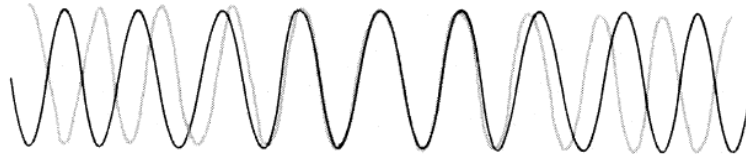
حيث تمثل معادلة (1.28) حلا لمعادلة الموجة (يترك للطالب برهان ذلك) .

#### ▪ دالة الموجات الكروية *spherical wave function*

بما ان للدوال التالية :  $e^{i(kr - \omega t)}$  ،  $\cos(kr - \omega t)$  قيم ثابتة عند قيمة ما لنصف القطر  $r$  وفي لحظة زمنية  $t$  ، لذلك تمثل الدوال التالية :  $\frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)}$  ،  $\frac{1}{r} \cos(kr - \omega t)$  حولا لمعادلة الموجة السابقة ، أيضا ، هي تمثل موجات ذات سطوح كروية تنطلق بإتجاه الشعاع الخارج من مصدر الإشعاع (مركز السطوح) .

#### (1.5) سرعة المجموعة *Group Velocity*

لنفرض ان موجتين توافقيتين تنتشران في وسط ما في نفس الإتجاه ، محور  $z$  ، (الشكل 1.6) ، بحيث يكون لهما نفس السعة ، ولكن تختلفان بمقدار ضئيل في التردد والعدد الموجي :  $\omega \pm \Delta\omega$  ،  $k \pm \Delta k$  .



الشكل (1.6) تركيب موجتان معا في وسط مادي .

وعليه ، بتطبيق مبدأ تركيب الأمواج ، نجد ان دالة الموجة المحصلة كما يلي:

$$U = U_0 e^{i[(k+\Delta k)z - (\omega+\Delta\omega)t]} + U_0 e^{i[(k-\Delta k)z - (\omega-\Delta\omega)t]} \quad (1.29)$$

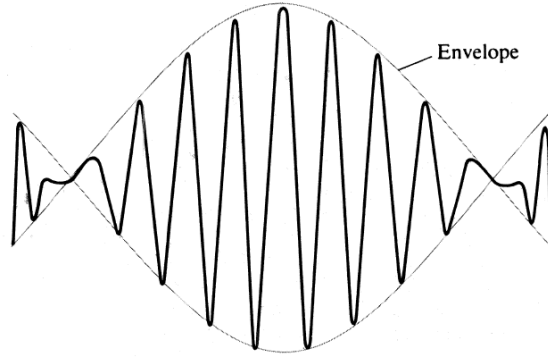
بإخراج العامل المشترك وتجميع الحدود الجبرية ، نحصل على التالي:

$$U = U_0 e^{i(kz - \omega t)} [e^{i(z\Delta k - t\Delta\omega)} + e^{-i(z\Delta k - t\Delta\omega)}] \quad (1.30)$$

او

$$U = 2U_0 e^{i(kz - \omega t)} \cos(z\Delta k - t\Delta\omega) \quad (1.31)$$

ويمكن تفسير معادلة (1.31) باعتبارها موجة منفردة  $2U_0 e^{i(kz - \omega t)}$  والتي لها مغلف معدل *modulation envelope* يحدده المقدار:  $\cos(z\Delta k - t\Delta\omega)$  ، ( الشكل 1.7 )



شكل (1.7) : محصلة موجتين توافقيتين تنتشران في وسط ما.

ونلاحظ ان الغلاف المعدل لا يتحرك بسرعة الطور لكل موجة منفردة ، وانما يتحرك بمعدل يعرف بسرعة المجموعة *Group velocity* ،  $u_g$  ، اي

$$u_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (1.32)$$

ونؤول هذه السرعة في النهاية الى التالي:

$$u_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (1.33)$$

### ▪ التفريق Dispersion

في بعض الأوساط المادية ، تكون سرعة طور الموجة  $u$  دالة للتردد الزاوي  $\omega$  ، في هذه الحالة ، تسمى هذه الظاهرة بالتفريق . وفي هذه الحالة ، يكون معامل انكسار الوسط معتمدا على التردد ( او طول الموجة ) ، اي:  $n = c/u$  . وبناء عليه ، نجد ان

$$\omega = ku = \frac{kc}{n} \quad (1.34)$$

باستخدام تعريف سرعة المجموعة ، نحصل على التالي:

$$u_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \left( \frac{kc}{n} \right) = \frac{c}{n} - \frac{ck}{n^2} \frac{dn}{dk} = u \left( 1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk} \right) \quad (1.35)$$

مثال (1.1)

برهن صحة العلاقة التالية:

$$u_g = u - \lambda \frac{du}{d\lambda}$$

الحل

$$u_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(ku)}{dk} = u + k \frac{du}{dk}$$

$$= u + k \frac{du}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk}$$

$$\frac{dk}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2} \quad \text{اذن ، } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{حيث}$$

بالتعويض ، نجد ان

$$u_g = u - \frac{2\pi}{k} \frac{du}{d\lambda} = u - \lambda \frac{du}{d\lambda}$$

نلاحظ من هذه العلاقة ان الوسط المادي الذي تكون فيه سرعة الطور ثابتة ( لا تعتمد على طول الموجة ) ، تكون سرعة الطور لهذه الموجة المنتشرة خلاله متساوية مع سرعة المجموعة .

مثال (1.2)

برهن صحة العلاقة التالية:

$$u_g = u - \frac{\omega}{n} \frac{dn}{dk}$$

الحل:

بالرجوع الى معادلة (1.35) ، نجد ان

$$u_g = u - \frac{u}{kn} \frac{dn}{dk} = u - \frac{\omega}{n} \frac{dn}{dk}$$

ايضا ، نلاحظ انه في حالة الوسط المادي الذي معامل انكساره ثابتا تتساوى سرعة المجموعة مع سرعة الطور . وعموما ، في اغلب الأوساط المادية يزداد معامل الإنكسار مع زيادة ثابت الإنتشار  $k$  ، ولذلك تكون سرعة طور الموجة اقل من سرعة المجموعة .

## تمارين

(1.1) عبر عن الصورة الرياضية لمعادلة الموجة في البعد الواحد بدلالة زوج المتغيرات التالية:

(a) التردد الزواي و سرعة الطور. (b) طول الموجة و سرعة الطور.

(1.2) اثبت ان الدالة :  $f(z - ut)$  تمثل حلا لمعادلة موجة البعد الواحد التالية:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (1/u^2) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

حيث  $f$  دالة قابلة للإشتقاق .

(1.3) برهن ان دالة الموجة التوافقية الكروية :

$$\frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)}$$

تشكل الحل لمعادلة الموجة في الأبعاد الثلاثة ، حيث  $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$  ، ( استخدم الإحداثيات الكروية )

(1.4) اذا كانت طول موجة شعاع ليزر الهيليوم – نيون في الفراغ تساوي 633 nm ، جد ثابت الإنتشار  $k$  لهذا الشعاع في الماء (  $n=1.33$  ).

(1.5) برهن صحة العلاقة التالية:

$$\frac{1}{u_g} = \frac{1}{u} - \frac{\lambda_0}{c} \frac{dn}{d\lambda_0}$$

حيث  $\lambda_0$  طول الموجة في الفراغ ،  $n$  معامل انكسار الوسط .

(1.6) استخدم معادلة كوشي Cauchy equation التالية:

$$n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$$

لحساب سرعة المجموعة عند طول موجة الفراغ  $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$  ،  $B = 3 \times 10^4 \text{ (nm)}^2$  ،  $A = 1.5$  .

(1.7) على فرض ان معامل الإنكسار في وسط ما يتناسب عكسيا مع طول الفراغ ، اي  $n = \frac{A}{\lambda_0}$  ، برهن ان سرعة

المجموعة تعادل نصف سرعة الطور في هذه الحالة

## الفصل الثاني: الطبيعة الإتجاهية للضوء The Vectorial Nature of Light

يتناول هذا الفصل دراسة مفهوم استقطاب الموجات ال

ضوئية ، وانواع هذا الإستقطاب ، وطريقة تمثيل استقطاب الموجة باستخدام المصفوفات . كما يقدم ظواهر انعكاس وانكسار الموجات عند السطح الفاصل بين وسطين ماديين ويتناول دراسة ظاهرة الإنعكاس الكلي للضوء .

### (2.1) ملاحظات عامة General Remarks

كما ورد في الفصل الأول ، تحقق مكونات المجالات في الموجة الكهرومغناطيسية ، كلا على انفراد ، نفس معادلة الموجة الأساسية التالية :

$$\nabla^2 U = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

ويتطلب تحقيق معادلات ماكسويل ان تكون هذه المجالات متغيرة زمانيا ومكانيا وان يكون المجال المغناطيسي مرافقا للمجال الكهربائي دائما ، والعكس صحيحا . وبشكل خاص ، تكون هناك علاقة محددة بين هذه المجالات اثناء انتشار الموجة الكهرومغناطيسية. سنتناول في هذا الفصل تلك العلاقة بالتفصيل .

لنعتبر ان الدالة الأسية المركبة هي حلا لمعادلة (2.1) ، اي ،  $U \sim e^{i(k.r - \omega t)}$  ، وعليه نجد ان

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = -i\omega \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (2.2)$$

اما المشتقة المكانية الجزئية بالنسبة لأي احداثي من الإحداثيات الكارتيزية ، مثلا  $x$  ، تكون كما يلي

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) &= \frac{\partial}{\partial x} \exp i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \\ &= ik_x \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \end{aligned}$$

بتطبيق مؤثر دلتا  $del operator$  على هذه الدالة الأسية ، حيث

$$\nabla = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.3)$$

فإن ،

$$\nabla \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = i\mathbf{k} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (2.4)$$

وعليه ، يمكن تعريف مؤثرات  $operators$  ، التي تكون صالحة للتطبيق في حالة الموجة التوافقية الخطية ، كما يلي

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega \quad (2.5)$$

$$\nabla \rightarrow i\mathbf{k} \quad (2.6)$$

حيث  $i = \sqrt{-1}$  ، كما ان  $\mathbf{k}$  يمثل متجه ثابت الانتشار للموجة .

بالرجوع الى معادلات ماكسويل ، وفي حالة الأوساط المادية غير الموصلة والمتماثلة المناحي ، نجد ان الصور الرياضية لهذه المعادلات تصبح كما يلي:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.10)$$

بتطبيق معادلتني (2.5 ، 2.6) على هذه المعادلات ، نحصل على التالي:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mu\omega\mathbf{H} \quad (2.11)$$

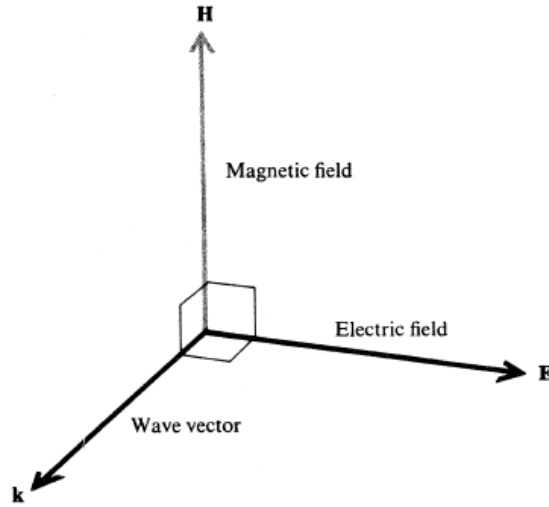
$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\epsilon\omega\mathbf{E} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.13)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.14)$$

نستنتج من هذه المعادلات ما يلي :

- تكون المتجهات :  $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k}$  للموجة الكهرومغناطيسية متعامدة ، اي ان المجال الكهربائي يتعامد مع المجال المغناطيسي وكلاهما يكون متعامدا مع متجه انتشار الموجة في الوسط ( الشكل 2.1).



الشكل (2.1) العلاقات الإتجاهية للمجالات في الموجة الكهرومغناطيسية.

- يتبع من هذه المعادلات استنتاج العلاقة التي تعطي الصورة الرياضية لقيم هذه المجالات بدلالة بعضها البعض ، وتكون الخطوات الجبرية كما يلي:

باستخدام معادلة (2.12) وإعتبار قاعدة الضرب الإتجاهي ، نجد ان



$$H = \frac{\epsilon\omega}{k} E = \epsilon u E \quad (2.15)$$

كما يمكن اعادة كتابة معادلة (2.15) بدلالة معامل انكسار الوسط ، n ، كما يلي :

باستخدام تعريف معامل الإنكسار ، نحصل على التالي

$$n = \frac{kc}{\omega} = \frac{k}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \Rightarrow \frac{\omega}{k} = \frac{n}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

وعليه ، تؤول معادلة (2.15) الى التالي:

$$H = \frac{nE}{Z_0} \quad (2.16)$$

حيث

$$Z_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$$

وتعرف الكمية ،  $Z_0$  ، بممانعة الفراغ Vacuum Impedance وتساوي  $377 \Omega$  .

نلاحظ من معادلة (2.16) ان النسبة بين قيمة المجال المغناطيسي الى قيمة المجال الكهربائي تتناسب طرديا مع معامل انكسار الوسط الذي تنتشر فيه تلك الموجة الكهرومغناطيسية ، فمثلا عند انتقال هذه الموجة من الهواء الى الزجاج ( $n=1.5$ ) ، فإن هذه النسبة تزداد بمقدار 1.5 ، وهكذا...

## (2.2) جريان الطاقة الكهرومغناطيسية : متجه بويننج

### Electromagnetic Energy Flow: Poynting Vector

وصف **بويننج** المعدل الزمني لجريان ( انسياب) طاقة الموجة الكهرومغناطيسية خلال الوسط لكل وحدة المساحة في اتجاه انتشارها بدلالة متجه عرف بإسمه ( متجه بويننج ) **Poynting Vector** ويرمز له ، **S** ، ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (2.17)$$

حيث يحدد هذا المتجه كلا من إتجاه ومقدار تدفق الطاقة الكهرومغناطيسية  $Energy\ flux$  ، وتكون وحدته في نظام الوحدات العالمي MKS الواط / متر<sup>2</sup> ( watt/ m<sup>2</sup> ).

لنعتبر معادلة الموجة الكهرومغناطيسية التوافقية والمستوية التي يعبر فيها عن الصيغ الرياضية للمجالات الكهربائية والمغناطيسية بدلالة الجزء الحقيقي للدالة المركبة الأسية، اي :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (2.18)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (2.19)$$

وعليه ، تكون القيمة اللحظية لمتجه بوينتج كما يلي:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (2.20)$$

بما ان معدل القيمة *average value* لدالة جيوب التمام تساوي (1/2) ، لذلك يكون معدل قيمة متجه بوينتج ،  $\langle \mathbf{S} \rangle$  ، كما يلي:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 \quad (2.21)$$

اما عند استخدام الدالة الأسية المركبة للموجة الكهرومغناطيسية ، تعرف القيمة المتوسطة (معدل القيمة) لهذا المتجه كما يلي:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*$$

حيث ،  $\mathbf{H}_0^*$  ، تمثل مرافق متجه المجال المغناطيسي . بما ان متجه انتشار الموجة ،  $\mathbf{k}$  ، متعامدا مع متجهات المجالات ، لذلك نستنتج ان متجه بوينتج يكون في اتجاه انتشار الموجة .

#### ■ العلاقة بين معدل تدفق الطاقة و الإشعاعية *Irradiance*

تعرف الإشعاعية (الشدة الإشعاعية) ،  $\mathbf{I}$  ، بأنها القدرة الإشعاعية ( التدفق الإشعاعي المنتشر في وسط ما في وحدة الزمن ) الساقطة من مصدر ما على وحدة المساحة ، ووحدتها: واط / متر<sup>2</sup> ، وعليه تكون العلاقة بين معدل تدفق متجه بوينتج والإشعاعية كما يلي:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = I \frac{\mathbf{k}}{k} = I \hat{\mathbf{n}} \quad (2.22)$$

حيث:  $\hat{n} = \mathbf{k}/k$  ،

باستخدام معادلة (2.16) ومعادلة (2.21) ، نجد ان مقدار الإشعاعية كالتالي:

$$I = \frac{1}{2} E_0 H_0 = \frac{n}{2Z_0} |E_0|^2 \quad (2.23)$$

فيزيائيا ، هذا يعني ان معدل جريان الطاقة يتناسب طرديا مع مربع سعة موجة المجال الكهربائي . في حالة الأوساط المتماثلة المناحي (التي يكون فيها معامل الإنكسار متساوي في كافة نقاط الوسط) ، يكون اتجاه جريان الطاقة معينا باتجاه  $\mathbf{S}$  ، وهو نفس اتجاه  $\mathbf{k}$  . بينما في الأوساط غير متماثلة المناحي ( التي يكون فيها معامل الإنكسار متغيرا حسب الاتجاهات في الوسط ، كما في حالة الأوساط البلورية) ، تكون المتجهات  $\mathbf{S}$  ,  $\mathbf{k}$  ليست في نفس الإتجاه ، وسيرد شرح ذلك في الفصول اللاحقة.

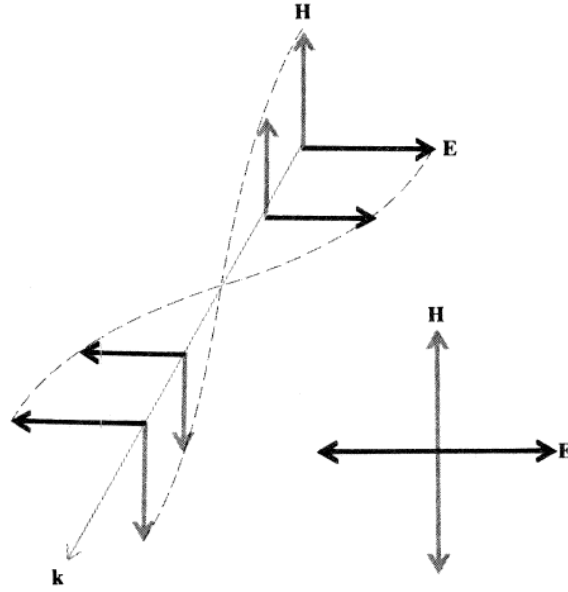
### (2.3) الإستقطاب Polarization

في البند السابق ، وجدنا ان الصيغة الرياضية للمجالات الكهربائية والمغناطيسية في الموجة التوافقية المستوية تعطى كما يلي:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (2.24)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (2.25)$$

في الطبيعة ، يكون تذبذب هذه المجالات عشوائيا ، بمعنى ان اتجاهها يكون في كافة الإتجاهات وليس مقتصرا على اتجاه معين ، ولذلك يقال ان هذه الموجة الكهرومغناطيسية ( او الضوء ) غير مستقطبة *unpolarized* . اما اذا كان اتجاه تذبذب المجال الكهربائي ( او المجال المغناطيسي ) مقتصرا على اتجاه محدد ( اي تكون سعات هذه المجالات :  $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$  متجهات حقيقية ثابتة ) ، فإنه يقال ان هذه الموجة **مستقطبة خطيا** *linearly polarized* . عمليا ، تم الإتفاق على ان اتجاه المجال الكهربائي في الموجة الكهرومغناطيسية هو المحدد لإتجاه الإستقطاب ( الشكل 2.2).



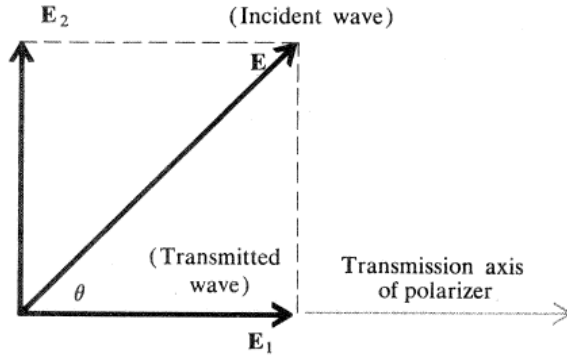
شكل (2.2): المجالات في الموجة المستقطبة خطيا.

عمليا ، يمكن الحصول على ضوء مستقطب بعدة طرق : طريقة الإمتصاص الإنتقائي ، التشتت ، الإنعكاس ، والإنكسار المزدوج . في هذا الفصل ، سنورد بإختصار شرحا لبعض هذه الطرق ، ويمكن للطلاب الرجوع الى كتب الضوء الكلاسيكية لمزيد من المعلومات عن الطرق الأخرى .

#### ■ الإستقطاب بطريقة الإمتصاص الإنتقائي *Polarization by selective absorption*

تسمى الأداة التي تحول الضوء ( او الموجة الكهرومغناطيسية) غير المستقطب الى ضوء مستقطب خطيا بالمقطب الخطي *linear polarizer* . يعتمد عمل هذه الأداة على ما يعرف بخاصية ثنائية التلون **dichroism** لبعض البلورات ، مثل بلورة التورمالين *Tourmaline crystal* والتي تتركب من :  $Al_2O_3$  ,  $B_2O_3$  ,  $SiO_2$  ، وتعرف تجاريا بإسم بولارويد *Polaroid* ، وتم تطويرها على يد العالم إدوين لاند *Edwin Land* ، حيث تصنع على هيئة شبكة سلكية مغموسة في مادة بلاستيكية ، ويتم تشكيلها وفق الصورة المخبرية المعروفة.

يقوم مبدأ عمل المقطب على الأسس التالية : عند سقوط الضوء غير المستقطب على هذا المقطب ، فإن المجال الكهربائي يتحلل الى مركبتين متعامدتين: احدهما موازية لأسلاك الشبكة والأخرى تكون متعامدة عليها . وتعمل المركبة الموازية على سحب الإلكترونات الحرة في هذه الأسلاك بإتجاه طولها ، مما يسبب مقاومة تؤدي الى ضياع الطاقة على هيئة حرارة ، وهذا يسبب تلاشيا لمركبة المجال الكهربائي في هذا الإتجاه . اما المركبة العمودية لهذا المجال فلا تعاني اي ضياع للطاقة وتنفذ من المقطب بنفس الشدة تقريبا . ويسمى محور البلورة الذي يسمح بمرور هذه المركبة محور النفوذية *Transmission Axis* ( الشكل 2.3) ، وينفذ الضوء مستقطبا في اتجاه هذا المحور ( اي، يتذبذب المجال الكهربائي في اتجاه موازي لهذ المحور ) .



شكل (2.3) : تحليل المجال الكهربائي الساقط على مقطب خطي.

لنفرض ان  $\theta$  = الزاوية المحصورة بين اتجاهي الضوء ( المجال الكهربائي في الموجة) الساقط على المقطب ومحور النفوذية . وعليه ، تكون قيمة مركبة المجال الكهربائي النافذة من المقطب وفي اتجاه محور النفوذية كما يلي:

$$E_1 = E \cos \theta$$

وحيث ان شدة الضوء تتناسب مع مربع المجال ، لذلك يعطي تربيع هذه المعادلة ما يلي:

$$I_1 = I \cos^2 \theta$$

حيث  $I$  تمثل شدة الضوء الساقط على المقطب ،  $I_1$  تمثل شدة الضوء النافذ من المقطب ، وهذه العلاقة تعرف بقانون مالوس *Malus law* . بما ان في الضوء غير المستقطب تكون القيم المخصصة للزاوية  $\theta$  متساوية احتمال الحدوث ، وعليه ، يمكن تحديد معامل النفوذية للمقطب المثالي بمقدار القيمة المتوسطة للدالة  $\cos^2 \theta$  ، اي يساوي ( 1/2 ) .

#### ■ الإستقطاب الجزئي *Partial Polarization*

يكون الضوء مستقطبا جزئيا وذلك عندما يكون مزيجا من الضوء المستقطب وغير المستقطب . وتعرف درجة الإستقطاب *degree of Polarization* ،  $P$  ، على النحو التالي :

$$P = \frac{I_{pol}}{I_{pol} + I_{unpol}} \quad (2.26)$$

حيث  $I_{pol}$  = شدة الضوء المستقطب ،  $I_{unpol}$  = شدة الضوء غير المستقطب.

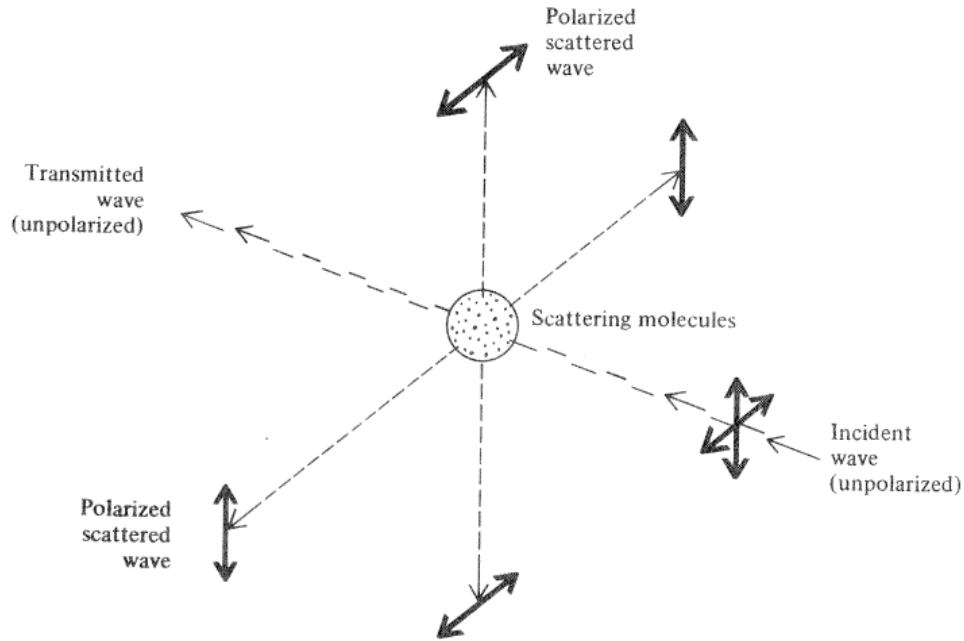
كما يمكن تعريف درجة الإستقطاب هذه بالصورة التالية ( يترك البرهان للطالب ) :

$$P = \frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}} \quad (2.27)$$

حيث :  $I_{min}$  ،  $I_{max}$  تمثلان القيمة العظمى لشدة الضوء النافذ من المقطب الخطي والقيمة الصغرى لهذه الشدة خلال تدوير هذا المقطب  $360^0$  .

### ■ طريقة الإستقطاب بالثشتت *Polarization by scattering*

عمليا ، عند انتشار الضوء في وسط ما فإن قوة المجال الكهربائي تؤثر على جزيئات الوسط ، وتعمل على انزياح الشحنات الكهربائية في الجزيء الواحد بمقدار ضئيل ، مما ينتج عن ذلك ما يسمى ثنائي القطب الكهربائي *electric dipole* . وتعتبر ثنائيات الأقطاب المسؤولة عن الخصائص الضوئية للوسط ( الإمتصاص ، الإنكسار وغيرها .. ) ، كما ان هذه الثنائيات القطبية تسبب تشتتاً ( او بعثرة ) للضوء الساقط عليها في كافة الإتجاهات . وكان اول من اشار الى هذه الظاهرة العالم ريلي *Rayleigh* ، حيث برهن ان شدة الضوء المتشتت بفعل جزيئات الوسط تتناسب عكسيا مع القوة الرابعة لطول موجة الضوء الساقط . وعليه ، استطاع تفسير سبب زرقة السماء ، وذلك لأن تشتت الضوء الأزرق ( ذو الموجة القصيرة ) يكون بدرجة اكبر من تشتت الضوء الأحمر ( ذو الموجة الطويلة ) . اضافة الى ذلك ، بين ان عملية تشتت الضوء الساقط على جزيئات الوسط ينتج عنها استقطابا للضوء المتشتت . وبين ان ذلك يعود الى اهتزازة ثنائيات الأقطاب الكهربائية في الوسط ، مما ينتج عنه اشعاع *Radiation* ، ويكون شدة هذا الإشعاع عظمى في الإتجاه المتعامد مع محور ثنائي القطب الكهربائي ، بينما لا يوجد اي اشعاع في اتجاه محور هذا الثنائي . كما يكون هذا الإشعاع مستقطبا خطيا في اتجاه محور ثنائي القطب المولد لهذا الإشعاع . يوضح الشكل (2.4) استقطاب الضوء الناتج عن تشتته بفعل دقائق الوسط ، واتجاه الأسهم يمثل اتجاه المجالات الكهربائية للضوء الساقط والمتشتت .



شكل (2.4) استقطاب الضوء بالتشتت .

ونلاحظ من هذا الشكل ان متجه المجال الكهربائي للموجة المنتشرة ( المستقطبة ) *scattered wave* يتعامد مع اتجاه الموجة الساقطة ( غير المستقطبة ) *incident wave* . كما تكون الموجة النافذة *transmitted wave* غير مستقطبة.

#### (2.4) الإستقطاب الدائري والبيضاوي *Circular and Elliptic Polarization*

في البند السابق ، تعرفنا على الضوء المستقطب خطيا وكيفية الحصول عليه من الضوء العادي غير المستقطب ، وفي هذا البند سندرس انواعا اخرى للضوء المستقطب وهما الإستقطاب الدائري والبيضاوي ( الإهليجي).

لنعتبر ان موجتين توافقيتين مستقطبتين خطيا ، بحيث يكون اتجاه استقطاب احدهما متعامدا مع اتجاه استقطاب الأخرى ولهما نفس سعة المجال الكهربائي  $E_0$  ، تنتشران في الوسط بفرق في الطور يساوي  $\frac{\pi}{2}$  . رياضيا ، لنفرض ان اتجاه المجال الكهربائي لإحدهما هو محور  $x$  ، بينما اتجاهه في الأخرى هو محور  $y$  ، لذلك، يمكن التعبير عن معادلة المجال الكهربائي لكل منهما كما يلي :

$$\hat{i}E_0 \cos (kz - \omega t)$$

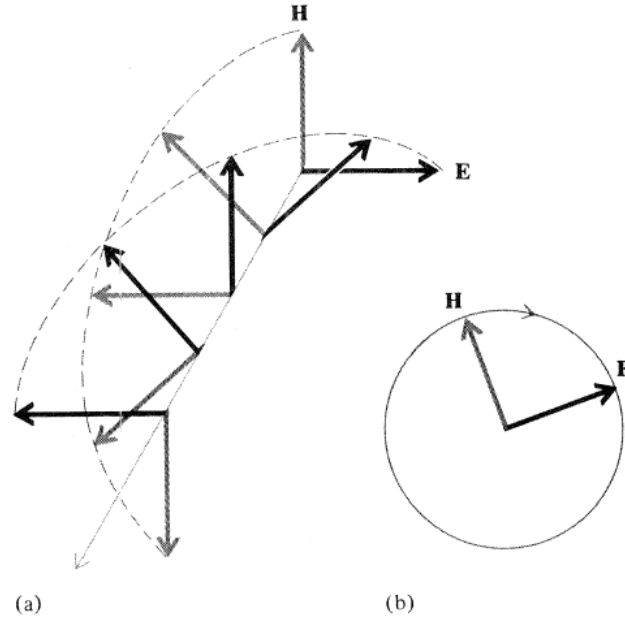
$$\hat{j}E_0 \sin (kz - \omega t)$$

كما يكون المجال الكهربائي المحصل والنتاج من تركيب هاتين الموجتين في الوسط كما يلي:

$$\mathbf{E} = E_0 [\hat{i} \cos (kz - \omega t) + \hat{j} \sin (kz - \omega t)] \quad (2.28)$$

فيزيائيا ، تمثل معادلة (2.28) موجة منفردة ، يكون لها متجه مجال كهربائي ثابت القيمة عند اي نقطة في الوسط ويدور بسرعة زاوية  $\omega$  . وتوصف هذه الموجة بالموجة المستقطبة دائريا *circular polarized wave* .

يبين الشكل (2.5) المجالات الكهربائية والمغناطيسية لهذه الموجة.



شكل (2.5): (a) المجالات الكهربائية والمغناطيسية في حالة الإستقطاب الدائري .

(b) اتجاه دوران المجالات الكهربائية والمغناطيسية في الموجة.

عند اي لحظة زمنية ، تصف متجهات هذه المجالات لوليا يمينيا في لفاته *Right- Handed Spiral*. اما اذا كان اتجاه دوران متجه المجال الكهربائي المحصل ضد عقارب الساعة عند النظر الى الموجة في اتجاه الإنتشار ، تسمى الموجة المحصلة بالموجة المستقطبة يساري *Left Circularly polarized* ، وتكون الإشارة بين حدي معادلة (2.28) سالبة .

ومن الجدير بالذكر ، ان مقدار واتجاه المجالات المحصلة لا تتغير اثناء انتشار الموجة المستقطبة في الوسط ، اي ،  $kz - \omega t = constant$  لأي نوع من الأستقطابات المذكورة . بالرجوع الى الترميز الآسي المركب *complex notation* ، يمكن كتابة متجه المجال الكهربائي المحصل للموجة المستقطبة دائريا كما يلي:

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}E_0 \exp i(kz - \omega t) + \hat{\mathbf{j}}E_0 \exp i(kz - \omega t \pm \pi/2) \quad (2.29)$$

باستخدام المتطابقة :  $e^{i\pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$  ، نجد ان

$$\mathbf{E} = E_0(\hat{\mathbf{i}} \pm i\hat{\mathbf{j}}) \exp i(kz - \omega t) \quad (2.30)$$

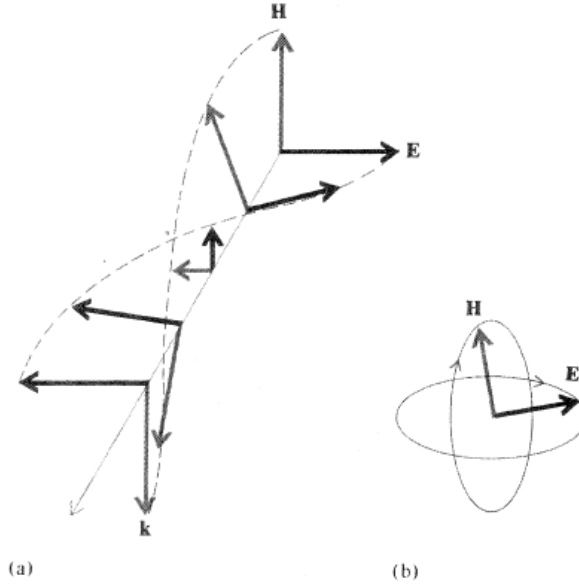


**ملاحظة:** في هذه المعادلة ، تكون الإشارة الموجبة خاصة بالإستقطاب الدائري اليساري ، بينما تكون الإشارة السالبة خاصة بالإستقطاب اليميني .

### ■ الأستقطاب البيضاوي

إذا كانت سعات مركبات المجالات الكهربائية الحقيقية غير متساوية ، أي تكون على الصور التالية:

عند  $E_0 \neq E'_0$  ، فإن متجه المجال الكهربائي المحصل ، عند أي نقطة في الوسط ، يدور ولكن بقيمة متغيرة ، ويمسح اثناء الدورة الكاملة شكلا بيضاويا ( كما في الشكل 2.6 ) .



شكل (2.6) مخطط المجالات المحصلة في الضوء المستقطب بيضاويا يمينيا (a) في أي لحظة زمنية عند أي نقطة في الوسط اثناء انتشار الموجة المستقطبة. (b)

رياضيا ، يمكن التعبير عن دالة الموجة المحصلة والمستقطبة بيضاويا كالتالي:

سعة المجال الكهربائي المحصل:

$$\mathbf{E}_0 = \hat{\mathbf{i}}E_0 + i\hat{\mathbf{j}}E'_0 \quad (2.31)$$

بينما تكون معادلة المجال الكهربائي المحصل ( دالة الموجة ) كما يلي :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp i(kz - \omega t) \quad (2.32)$$

وملخص القول ، تمثل معادلة (2.32) تعبيراً رياضياً لجميع أنواع الإستقطاب الموجي ، ويحدد المتجه  $\mathbf{E}_0$  نوع الإستقطاب كما يلي :

إذا كان  $\mathbf{E}_0 =$  كمية حقيقية وثابتة القيمة ، فإن الموجة المحصلة تكون مستقطبة خطياً .

إذا كان  $\mathbf{E}_0 =$  عدد مركب متساوي المركبات ، فإن الموجة المحصلة تكون مستقطبة دائرياً .

إذا كان  $\mathbf{E}_0 =$  عدد مركب غير متساوي المركبات ، فإن الموجة المحصلة تكون مستقطبة بيضاوياً .

#### ▪ لوحات ربع الموجي Quarter Wave Plates

للحصول على ضوء مستقطب دائرياً ، تستخدم صفائح (لوحات) ذات سمك محدد ، حيث تصنع من بلورات crystals تملك خاصية الإنكسار المزدوج double refraction ، مثل بلورات : كربونات الكالسيوم Calcite ، الكوارتز Quartz والميكا mica . وهذه البلورات غير متماثلة المناحي anisotropic . بينما تكون المواد الصلبة وغير البلورية ، كالزجاج العادي ، متماثلة المناحي Isotropic . وقد تم اكتشاف ظاهرة الإنكسار المزدوج على يد العالم الرياضي إيرموس بارثولين (1625-1698) . ويعود سبب هذه الظاهرة الى إختلاف معامل انكسار مادة البلورة حسب اتجاهات الإستقطاب . يوجد لهذه البلورة محوران : الأول يسمى بالمحور البطيء *slow axis* ، حيث تكون قيمة معامل الإنكسار ،  $n_1$  ، في اتجاه هذا المحور عظمى ، بينما يسمى المحور الثاني بالمحور السريع *fast axis* والذي يكون متعامداً على المحور الأول ، ويمثل المحور السريع الإتجاه الذي تكون فيه قيمة معامل الإنكسار صغرى ،  $n_2$  .

لنفرض ان سمك الصفيحة  $d$  ، لذلك يكون طول المسار الضوئي optical path length للضوء المستقطب في اتجاه المحور البطيء والسريع :  $n_1 d$  ،  $n_2 d$  على الترتيب . وعليه ، وحتى يكون فرق المسار الضوئي لهذين الشعاعين يساوي ربع طول موجة ضوئية ، يجب ان يكون سمك اللوحة كالتالي :

$$d = \frac{\lambda_0}{4(n_1 - n_2)} \quad (2.33)$$

حيث  $\lambda_0 =$  طول موجة الفراغ للضوء الساقط على اللوحة .

#### مثال (2.1)

إذا كانت معاملات الإنكسار لصفحة مايكا في اتجاه المحور البطيء والمحور السريع كما يلي:

الشعاعين النافذتين من اللوحة يعادل مقدار ربع طول الموجة في حالة مرور ضوء طول موجته  $\lambda = 5890 \text{ nm}$  خلال هذه الصفيحة ؟

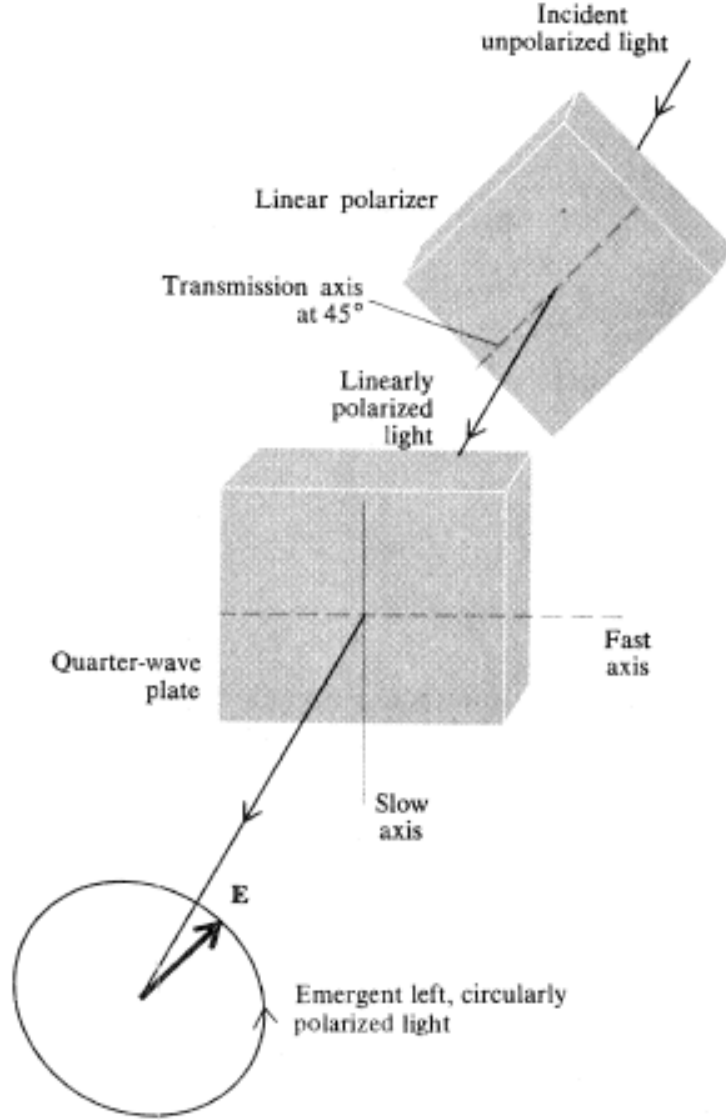
الحل

$$\frac{\lambda}{4} = d(n_1 - n_2) \Rightarrow d = \frac{\lambda}{4(n_1 - n_2)}$$

بتعويض القيم ، نجد ان

$$d = \frac{589 \times 10^{-9} \text{ nm}}{4(1.5877 - 1.5936)} = 0.036 \text{ mm}$$

يوضح الشكل (2.7) الترتيب اللازم لإنتاج الضوء المستقطب دائريا ، حيث يسقط الضوء غير المستقطب على المقطب (بولارويد) ، ثم على لوحة ربع موجي ليخرج مستقطبا بشكل دائري . لنفرض ان  $\theta$  = تمثل الزاوية بين محور نفاذ المقطب والمحور السريع للوحة ربع موجي ، فإذا كانت هذه الزاوية تساوي  $45^0$  ، يتحلل هذا الضوء خلال لوحة ربع الموجي الى مركبتين متعامديتين ومستقطبتين خطيا وبنفس سعة المجال الكهربائي ، ولكن بفرق طور قدره  $\frac{\pi}{2}$  . وبذلك، نحصل على ضوء مستقطب دائريا . يعتمد اتجاه دوران الضوء النافذ من لوحة ربع الموجي ( يمينيا او يساريا) على هذه الزاوية، فمثلا عند تدوير لوحة ربع الموجي بزاوية  $90^0$  ، تصبح  $\theta = 135^0$  ، وعليه نحصل على ضوء مستقطب دائريا يمينيا . اما للحصول على ضوء مستقطب ببيضاويا ، نجعل قيم  $\theta$  اي قيمة غير هاتين القيمتين السابقتين ، اي  $\pm 135^0$  ،  $\pm 45^0 \neq \theta$  .



شكل (2.7) ترتيب الحصول على ضوء مستقطب دائريا يساريا .

## (2.5) تمثيل الإستقطاب بالمصفوفات Matrix Representing of Polarization

في البند السابق ، تم تناول دراسة متجه مركبة السعة للمجالات الكهربائية والمغناطيسية ، ويمكن القول ان معادلة (2.31) ليست بالتعبير العام وذلك لأننا افترضنا ان مركبة المجال في اتجاه محور  $x$  تمثل بعدد حقيقي  $Real$  ، والمركبة في اتجاه محور  $y$  تمثل بعدد تخيلي  $Imaginary$  ، ولكن نريد طريقة عامة للتعبير عن السعة المركبة للموجة التوافقية المستوية . وتكون هذه الطريقة كما يلي:

$$\mathbf{E}_0 = \hat{\mathbf{i}}E_{0x} + \hat{\mathbf{j}}E_{0y} \quad (2.34)$$

في معادلة (2.34) ، تكون مركبات المجال الكهربائي اعدادا مركبة ، ويمكن ان نعبر عنها بالصورة الأسية للعدد المركب كما يلي:

$$E_{0x} = |E_{0x}| e^{i\phi_x} \quad (2.35)$$

$$E_{0y} = |E_{0y}| e^{i\phi_y} \quad (2.36)$$

ويعرف هذا التمثيل الإصطلاحي لسعات مركبات المجال الكهربائي **بمتجه جونز Jones Vector** ، ويكتب على صورة المصفوفة التالية :

$$\begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_{0x}| e^{i\phi_x} \\ |E_{0y}| e^{i\phi_y} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

حيث :  $|E_{0x}| , |E_{0y}|$  هي مقياس *modulus* مركبات السعة ، بينما  $\phi_x , \phi_y$  تمثل اطوار هذه المركبات في اتجاهي محوري  $x , y$  على الترتيب . كما يمكن باستخدام قواعد الأعداد المركبة الحصول على الصورة المعيارية

*Normalized form* لهذا المتجه ، وذلك بالقسمة على المقدار :  $\sqrt{|E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2}$  ، واخراج العامل المشترك .

$$\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \text{ فمثلاً ، يكون متجه جونز للضوء المستقطب خطياً في اتجاه محور } x$$

$$، \quad \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \text{ اما متجه جونز للضوء المستقطب خطياً في اتجاه محور } y$$

$$\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} : \text{ ويمثل متجه جونز للضوء المستقطب خطياً في اتجاه يصنع } 45^\circ \text{ مع محور } x$$

$$\text{وبالمثل ، يكون متجه جونز للضوء المستقطب دائرياً ويسارياً : } \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} ، \text{ وللضوء المستقطب دائرياً ويمينياً : } \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} .$$

ويستخدم الترميز السابق لمتجه جونز لتحديد نوع الضوء الناتج عن تركيب موجتين مستقطبتين ، وذلك باستخدام جبر المصفوفات ، فمثلاً عند تركيب موجتين احدهما مستقطبة دائرياً يمينياً والأخرى مستقطبة دائرياً يسارياً تكون الموجة المحصلة مستقطبة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 \\ -i+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اي ، تكون الموجة المحصلة مستقطبة **خطيا** في اتجاه محور  $x$  وسعتها تعادل  $\square$  ضعف سعة كل من هاتين الموجتين .

كما ان من التطبيقات المهمة لمصفوفة جونز معرفة نتائج تأثير ادخال ضوء ( موجة ) مستقطب على مقطبات ضوئية ( عناصر ضوئية *optical elements* ) ، مثل المقطب الخطي ، المقطب الدائري .... ، وهنا نمثل العنصر الضوئي بمصفوفة مربعة  $2 \times 2$  ومن ثم نستخدم قواعد ضرب المصفوفات . وبشكل عام ، لنفرض ان مصفوفة العنصر الضوئي:  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  ، و ان متجه جونز لمجال الموجة الساقطة على هذا العنصر الضوئي هو  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$  . وعليه ، يكون متجه جونز لمجال الضوء النافذ من هذا العنصر الضوئي كما يلي:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

حيث ،  $\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix}$  = مصفوفة متجه جونز للموجة النافذة من العنصر الضوئي.

وعموما ، اذا سقط ضوء مستقطب على مجموعة متتالية من العناصر الضوئية عددها  $n$  ، فإن متجه جونز لمجال الضوء النافذ من اخر عنصر ضوئي يمثل كما يلي:

$$\begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

يعطي الجدول (2.1) مصفوفات جونز للعنصر الضوئية والتي تستخدم في حل المسائل ، مع ملاحظة ان معاملات المعايير لهذه المصفوفات قد تم اخذها بعين الاعتبار ، حيث ان هذه المعاملات تكون ضرورية عند التعامل مع كميات طاقة الأمواج (الضوء) .

$$\begin{array}{l}
\text{Linear polarizer} \left\{ \begin{array}{l} \text{Transmission axis horizontal} \\ \text{Transmission axis vertical} \\ \text{Transmission axis at } \pm 45^\circ \end{array} \right. \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \\
\\
\text{Quarter-wave plate} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fast axis vertical} \\ \text{Fast axis horizontal} \\ \text{Fast axis at } \pm 45^\circ \end{array} \right. \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & 1 \end{bmatrix} \end{array} \\
\\
\text{Circular polarizer} \left\{ \begin{array}{l} \text{Right} \\ \text{Left} \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \end{array}
\end{array}$$

جدول (2.1) : مصفوفات جونز للعناصر الضوئية.

## مثال (2.2)

يسقط ضوء مستقطب خطيا على لوحة ربع موجي (كما في الشكل 2.7) ، استخدم مصفوفات جونز لإيجاد نوع استقطاب الضوء النافذ ؟

## الحل

حيث ان الضوء المستقطب بزواية  $45^\circ$  بالنسبة لمحور  $x$  ، يكون متجه جونز للمجال الكهربائي:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  ،

اما مصفوفة جونز للوحة التي يكون محورها السريع افقيا (محور  $x$ ) :  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$  ، وعليه ، تمثل هذه العملية كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

اي ، يكون الضوء النافذ من اللوحة مستقطبا دائريا يساريا.

## ■ الإستقطاب المتعامدي *Orthogonal Polarization*

إذا كان  $E_1, E_2$  هما السعات المركبة للمجال الكهربائي في موجتين مستقطبتين ، بحيث تحقق الشرط التالي:

$$E_1 \cdot E_2^* = 0$$

فان هاتين الموجتين تكونان في حالة استقطاب **تعامدي** . كما ان (\*) تدل على المرافق المركب للكمية ، اي ان الزاوية بين هذه المتجهات تكون  $90^0$  (قاعدة الضرب العددي) . فمثلا ، الإستقطاب الدائري اليساري يكون استقطاب متعامدا مع الإستقطاب الدائري اليميني. كما يمكن ان نعبر عن شرط الإستقطاب المتعامدي بدلالة متجه جونز كالتالي:

إذا كان متجه جونز لسعات المجال الكهربائي في موجتين مستقطبتين هما :  $\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$  ،  $\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$  ، فإن شرط التعامد للمتجهين يجب ان يحقق ما يلي:

$$A_1 A_2^* + B_1 B_2^* = 0 \quad (2.40)$$

### مثال (2.3)

اثبت ان متجهي جونز التاليين :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix}$$

يمثلان حالة استقطاب متعامد ؟

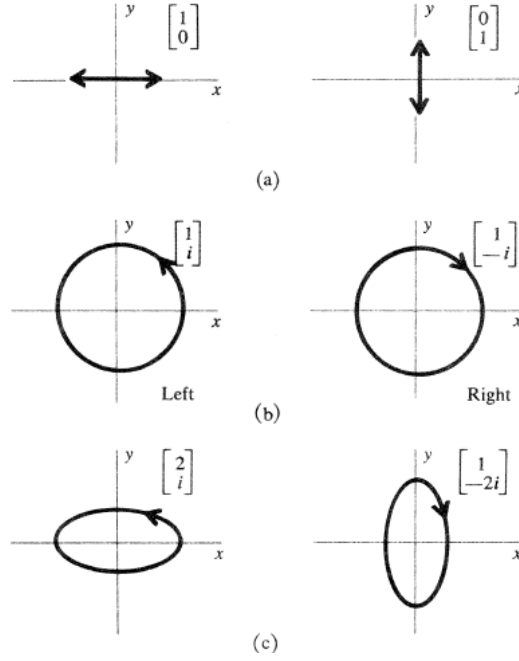
### الحل

باستخدام معادلة (2.40) ، نجد ان

$$1 \times 2 + (i)(2i) = 2 + 2i^2 = 2 - 2 = 0$$

كما يبين الشكل (2.8) بعضا من متجهات جونز المتعامدة لموجات مستقطبة خطيا ، دائريا ، وبيضاويا .





الشكل (2.8) بعض حالات متجهات جونز المتعامدة.

من الملاحظ ان متجه للمجال الكهربائي لأي استقطاب عشوائي (مطلق) *arbitrary* يمكن ان يتحلل الى مركبتين متعامدتين ، بحيث يمكن ان نمثل كل منهما بمتجه جونز للإستقطاب الخطي ، اي :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

او الى مركبتين متعامدتين ومستقطبتين دائريا كالتالي:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (A + iB) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} (A - iB) \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

**البرهان:**

بإدخال العامل المشترك في المصفوفات ، نحصل على مكونات المتجهين التالية:

$$A_1 = \frac{1}{2} (A + iB) \Rightarrow A_1^* = \frac{1}{2} (A - iB)$$

$$B_1 = \frac{-i}{2} (A + iB) \Rightarrow B_1^* = \frac{i}{2} (A - iB)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} (A - iB) \Rightarrow A_2^* = \frac{1}{2} (A + iB)$$

$$B_2 = \frac{i}{2} (A - iB) \Rightarrow B_2^* = \frac{-i}{2} (A + iB)$$

بتطبيق شرط التعامد على المتجهين ، مع ملاحظة ان  $i^2 = -1$  ، نجد ان

$$A_1 A_2^* + B_1 B_2^* = 0$$

### ■ المتجهات الذاتية لمصفوفات جونز *Eigenvectors of Jones Matrices*

يعرف **المتجه الذاتي** لمصفوفة متجه ما بأنه ذلك المتجه الخاص الذي اذا ضرب بالمصفوفة يعطي نفس المتجه مضروباً بعامل ثابت . رياضياً، يعبر عن هذا التعريف كما يلي:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.41a)$$

حيث ،  $\lambda =$  عدد ثابت ، ويكون اما عدد حقيقي او عددا مركبا ، ويسمى هذا العدد بالقيمة الذاتية ( الخاصة ) *eigenvalue* . ويعني هذا فيزيائيا ما يلي: المتجه الذاتي لمصفوفة جونز تمثل الإستقطاب الخاص للموجة التي اذا مرت من خلال عنصر ضوئي ( مقطب ) فإنها تخرج منه بنفس حالة الإستقطاب وبدون تغيير. مع ذلك ، قد تتغير السعة والطور للموجة الساقطة وفقا لقيم  $\lambda$  . اي ، اذا عبرنا عن  $\lambda$  بالصورة التالية:

$$\lambda = |\lambda| e^{i\varphi} ، \text{ فإن } |\lambda| \text{ يمثل التغير في السعة ، } \varphi \text{ تمثل التغير في طور الموجة.}$$

### ● إيجاد المتجه الذاتي والقيم الذاتية لمصفوفة مربعة $2 \times 2$

بإتباع نفس الخطوات الرياضية المألوفة في ميكانيكا الكم والخاصة بإيجاد القيم الذاتية للمصفوفات، نحصل على ما يلي:

نستخدم القواعد الجبرية للمصفوفات لإعادة كتابة معادلة (2.41a) ، اي تصبح على الصورة التالية:

$$\begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots(2.41b)$$

ويكون هناك حلا معتبرا لهذه المعادلة اذا كانت قيم  $A, B$  لا تساوي الصفر . وعليه ،

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.42)$$

وتعرف هذه المعادلة بالمعادلة العلمانية *secular equation* ، وعند نشر هذه المعادلة نحصل على التالي:

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0 \quad (2.43a)$$

يكون جذران لهذه المعادلة التربيعية وهما :  $\lambda_1, \lambda_2$  ، وهما يمثلان القيم الذاتية ، وكل جذر يعطي متجه ذاتيا للمصفوفة . ويمكن ايجاد هذه المتجهات بالتعويض في معادلة (2.41b) بهذه القيم وفك الناتج ، وبذلك نحصل على المعادلات المكافئة التالية :

$$(a - \lambda)A + bB = 0 \quad ; \quad cA + (d - \lambda)B = 0 \quad (2.43b)$$

مثال تو□ يحي :

جد القيم الذاتية والمتجه الذاتي لمصفوفة لوحة ربع الموجي ذات المحور السريع الأفقي ؟

الحل:

بالرجوع الى جدول (2.1) ، نجد ان عناصر مصفوفة هذه اللوحة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \Rightarrow a = 1, b = 0, c = 0, d = i$$

بالتعويض في المعادلة العلمانية ، نحصل على التالي:

$$(1 - \lambda)(i - \lambda) - 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = i$$

اذن ، القيم الذاتية هما :  $\{1, i\}$  .

بالرجوع الى معادلات (2.43b) نجد ان

$$(1 - \lambda)A = 0 , \quad (i - \lambda)B = 0$$

عند اعتبار  $\lambda_1 = 1$  ، فإن هذه المعادلات تستوجب ان تكون :  $A \neq 0 , B = 0$  ، وفي هذه الحالة ، يكون المتجه الذاتي للمصفوفة :  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  .

اما عند اعتبار  $\lambda_2 = i$  ، فإن هذه المعادلات تستوجب ان تكون :  $A = 0 , B \neq 0$  ، وعليه ،

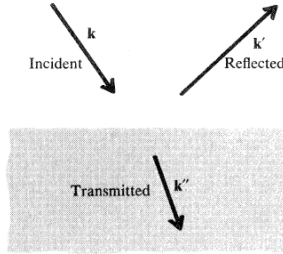
يكون المتجه الذاتي للمصفوفة :  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  .

فيزيائيا ، تدل هذه النتائج على ان الضوء النافذ من هذه اللوحة يكون مستقطبا خطيا في اتجاه المحور السريع للوحة . وبما ان  $|\lambda| = 1$  ، في كلا الحالتين ، هذا يعني ان سعة الضوء النافذ من اللوحة لا تتغير ، بينما يكون هناك تغير نسبي في الطور بمقدار :

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = i \Rightarrow e^{i\pi/2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

## (2.6) الانعكاس والانكسار عند المستوى الفاصل

في هذا البند ، نتناول اثبات قوانين الانعكاس والانكسار من وجهة نظر ان الضوء يمثل موجة كهرومغناطيسية . لنفرض ان موجة توافقية مستوية تسقط على سطح مستوي يفصل بين وسطين ماديين مختلفين ( كما في الشكل 2.9). عند وصول هذه الموجة الساقطة *incident wave* الى هذا السطح تنجزء الى موجة منعكسة *reflected wave* ، و موجة تنفذ الى الوسط الثاني *transmitted wave* .



شكل (2.9) : سلوك موجة مستوية تسقط على سطح فاصل بين وسطين .

يمكن التعبير عن الإعتدال المكاني- الزماني لهذه الموجات بالصورة التالية:

الموجة الساقطة :  $e^{i(k.r - \omega t)}$  ، الموجة المنعكسة :  $e^{i(k'.r - \omega t)}$  ، الموجة النافذة :  $e^{i(k''.r - \omega t)}$  .

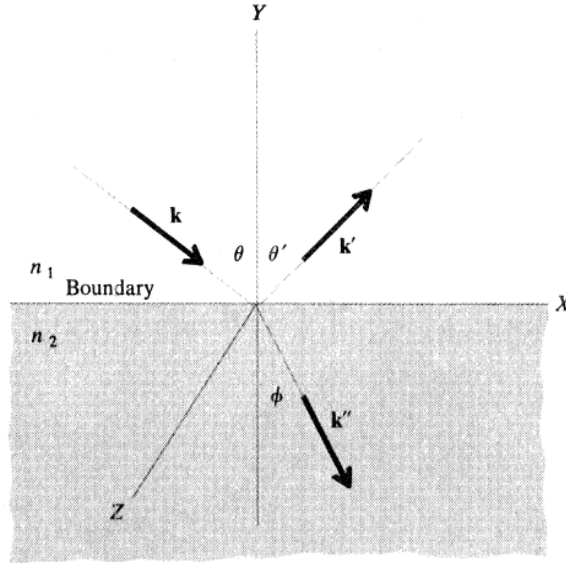
حتى تكون هناك علاقة ثابتة لجميع النقاط على السطح الفاصل بين الوسطين ولجميع قيم  $t$  ، يجب ان تكون كل هذه الدوال الأسية متساوية ، وبما ان معامل الزمن متساوي ، لذلك هذا يؤدي الى ما يلي :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}$$

.....(2.44)

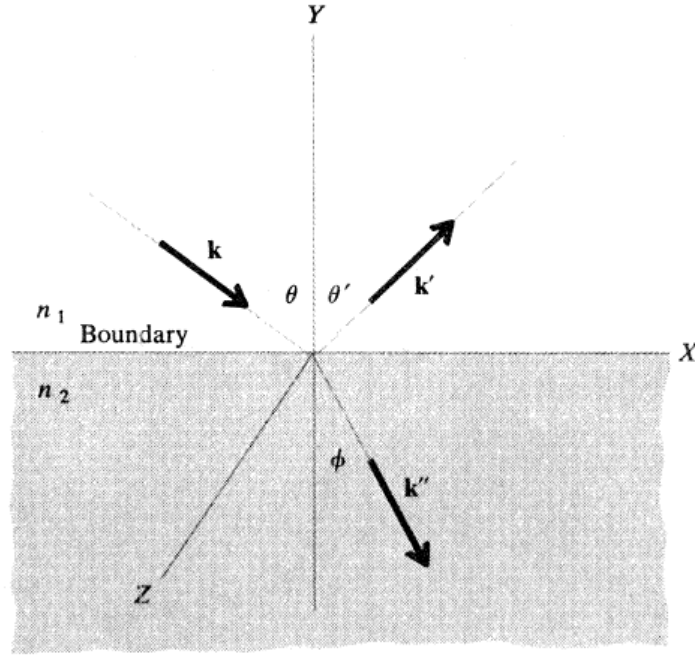
ومعنى ذلك ان متجهات الإنتشار لهذه الموجات الثلاثة  $(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'')$  تقع في مستوى واحد *coplanar* ( وهذا يعرف في الضوء بقانون الإنعكاس الأول) .

لنفرض ان نقطة السقوط على السطح الفاصل تمثل نقطة اصل المحاور الكارتيزية  $oxyz$  ، ويمثل السطح الفاصل بالمستوى  $xz$  ، بحيث ان  $\mathbf{k}$  تقع في مستوى  $xy$  ، او ما يسمى بمستوى السقوط *plane of incidence* ( الشكل ( 2.10) .



شكل (2.10) تمثيل الإنعكاس والإنكسار بالمستوى الكارتيزي .

لنفرض ان الزوايا بين العمودي على السطح الفاصل ( محور  $y$ ) ومتجهات الإنتشار لهذه الموجات هي :  $\theta, \theta', \phi$  . وبما ان مساقط متجهات الإنتشار عند السطح الفاصل في اتجاه محور  $x$  تكون متساوية ، لذلك تصبح معادلة (2.44) كما يلي:



شكل (2.10) مخطط انتشار الموجات عند السطح القاصل بين وسطين.

$$k \sin \theta = k' \sin \theta' = k'' \sin \phi \quad (2.45)$$

بما ان الموجة الساقطة تكون في نفس الوسط للموجة المنعكسة ، اي  $k = k'$  ، وعليه

$$\theta = \theta' \quad (2.46)$$

وهذا يعرف بقانون الانعكاس الثاني في الضوء.

وعند اعتبار النسبة بين مقداري متجهات الانتشار للموجة النافذة والموجة الساقطة ، نحصل على ما يلي

$$\frac{k''}{k} = \frac{\omega/u''}{\omega/u} = \frac{c/u''}{c/u} = \frac{n_2}{n_1} = n \quad (2.47)$$

حيث  $n =$  معامل الانكسار النسبي . باستخدام الجزء الثاني من معادلة (2.45) ، نحصل على التالي:

$$\frac{k''}{k} = \frac{\sin \theta}{\sin \phi} = \frac{n_2}{n_1} = n \quad (2.48)$$

وهذه العلاقة تعرف بقانون سنل Snell's Law .

## (2.7) سعات الموجات المنعكسة والمنكسرة Amplitudes of Reflected and Refracted Waves

لنفرض ان  $\mathbf{E}$  = سعة المجال الكهربائي للموجة الساقطة على السطح الفاصل بين الوسطين السابقين ( بند 2.6 ) ،

$\mathbf{E}' , \mathbf{E}''$  = سعتي المجال الكهربائي للموجة المنعكسة والنافذة على الترتيب . بإستخدام معادلات (2.11) ، نجد ان سعة المجال المغناطيسي لهذه الموجات تكون كما يلي:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (\text{incident}) \quad (2.49)$$

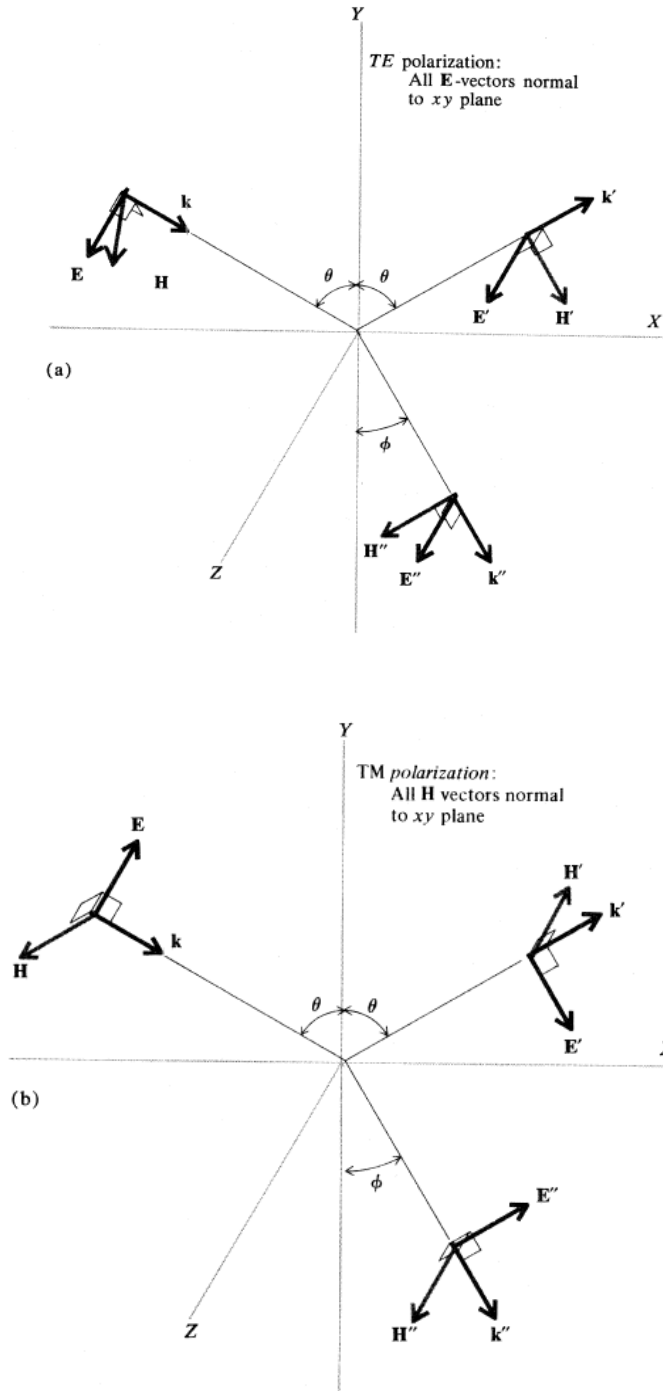
$$\mathbf{H}' = \frac{1}{\mu\omega} \mathbf{k}' \times \mathbf{E}' \quad (\text{reflected}) \quad (2.50)$$

$$\mathbf{H}'' = \frac{1}{\mu\omega} \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}'' \quad (\text{transmitted}) \quad (2.51)$$

عمليا ، يوجد حالتان من الإستقطاب للموجة الساقطة وهما:

- الإستقطاب المستعرض كهربيا ويرمز له **TE- Polarization** ، حيث يكون متجه المجال الكهربائي في الموجة الساقطة موازيا للمستوى السطح الفاصل ( او متعامدا مع مستوى السقوط) .
- الإستقطاب المستعرض مغناطيسيا ويرمز له **TM- Polarization** ، حيث يكون متجه المجال المغناطيسي في الموجة الساقطة موازيا للمستوى السطح الفاصل .

يوضح الشكل (2.11) اتجاهات المجالات الكهربائية والمغناطيسية لحالتي استقطاب الموجة الساقطة وتغير هذه الإتجاهات عند السطح الفاصل بين الوسطين ، في الموجة المنعكسة والنافذة.



شكل (2.11): متجهات الموجة لحالتي الإستقطاب (a) المستعرضة كهرييا (b) المستعرضة مغناطيسيا.

لنفرض ان  $xz$  هو مستوى السطح الفاصل ، ومحور  $y$  هو العمودي على هذا السطح ، وعليه يكون  $xy$  هو مستوى السقوط . عند تطبيق الشروط الحدودية *Boundary conditions* ( ارجع الى كتب الكهربية



والمغناطيسية) على المجالات الكهربائية والمغناطيسية ، وهي ان المركبات المماسية للمجال الكهربائي تكون متصلة عند السطح الفاصل بين الوسطين . لذلك ، في حالة الموجة المستعرضة كهربيا ، نجد ان:

$$\begin{aligned} & (TE \text{ polarization}) \\ & E + E' = E'' \\ & -H \cos \theta + H' \cos \theta = -H'' \cos \phi \\ & -kE \cos \theta + k'E' \cos \theta = -k''E'' \cos \phi \end{aligned} \quad (2.52)$$

وفي حالة الموجة المستعرضة مغناطيسيا ، تكون المركبات المماسية tangential components للمجالات المغناطيسية متصلة continuous ، وعليه ،

$$\begin{aligned} & (TM \text{ polarization}) \\ & H - H' = H'' \\ & kE - k'E' = k''E'' \\ & E \cos \theta + E' \cos \theta = E'' \cos \phi \end{aligned} \quad (2.53)$$

ملاحظة: عند اشتقاق هذه المعادلات ، استخدمت معدلتني (2.49-2.51) ، والتي تتضمن العلاقة بين متجهات المجالات الكهربائية والمغناطيسية للموجات الثلاثة ، وهي كما يلي:  $H, H', H'' \propto kE, k'E', k''E''$  .

معاملات الانعكاس والانكسار عند السطح الفاصل بين وسطين :

لنفرض ان موجة مستعرضة كهربيا او مغناطيسيا تسقط على سطح فاصل بين وسطين ماديين ، تسمى النسبة بين سعتي المجال الكهربائي للموجة المنعكسة والساقطة بمعامل الانعكاس للموجة المستعرضة كهربيا (TE) . رياضيا ،

$$r_s = \left( \frac{E'}{E} \right)_{TE}$$

$$r_p = \left( \frac{E'}{E} \right)_{TM}$$

كما يمكن التعبير عن هذه المعاملات بدلالة زوايا السقوط والانكسار كما يلي :

في المعادلات (2.52 ، 2.53) ، نحذف  $E''$  وباستخدام تعريف معامل الانكسار ،  $n = \frac{c}{u} = \frac{ck}{\omega}$  ، نجد ان

الصور الرياضية لهذه المعاملات كالتالي:

$$r_s = \frac{\cos \theta - n \cos \phi}{\cos \theta + n \cos \phi} \quad (2.54)$$

$$r_p = \frac{-n \cos \theta + \cos \phi}{n \cos \theta + \cos \phi} \quad (2.55)$$

$$. n = \frac{n_2}{n_1} \text{ : حيث}$$

وبالمثل ، يمكن تعريف معاملات النفاذ للموجة المستعرضة، في حالتها الإستقطاب ، كما يلي:

$$t_s = \left( \frac{E''}{E} \right)_{TE} ; t_p = \left( \frac{E''}{E} \right)_{TM}$$

في حالة السقوط العمودي على السطح الفاصل ، أو  $\theta = 0 ; \phi = 0$  ، نجد ان الصور الرياضية لهذه المعاملات ، وفي كلتا حالتها الإستقطاب ، تكون كالتالي:

$$r_s = r_p = \frac{1 - n}{1 + n}$$

نلاحظ ان اشارة هذه المعاملات تعتمد على كون معامل الإنكسار النسبي اكبر او اقل من الواحد الصحيح ، فمثلا عند سقوط الضوء من وسط كثيف ( الزجاج  $n_1 = 1.5$  ) الى وسط خفيف ضوئيا ( الهواء  $n_2 = 1$  ) يكون مقدار  $n = 1.5 > 1$  ، وعليه تكون اشارة  $\left( \frac{E'}{E} \right)$  سالبة ، وهذا يعني ان طور الموجة المنعكسة على السطح الفاصل بين الوسطين يتغير بمقدار  $180^\circ$  بالنسبة لطور الموجة الساقطة .

#### ■ معادلات فرنل Fresnel Equations

باستخدام قانون سنل ،  $\left[ n = \frac{\sin \theta}{\sin \phi} \right]$  ، وباعتبار العلاقات المثلثية لمجموع او فرق زاويتين ، نجد ان الصور الرياضية لمعاملات الإنكسار والانعكاس للضوء عند السطح الفاصل بين الوسطين تؤول الى التالي:

$$r_s = - \frac{\sin (\theta - \phi)}{\sin (\theta + \phi)} \quad (2.56)$$

$$t_s = \frac{2 \cos \theta \sin \phi}{\sin (\theta + \phi)}$$

$$r_p = - \frac{\tan (\theta - \phi)}{\tan (\theta + \phi)} \quad (2.57)$$

$$t_p = \frac{2 \cos \theta \sin \phi}{\sin (\theta + \phi) \cos (\theta - \phi)}$$

وتعرف هذه المعادلات باسم معادلات فرنل.

كما يمكن تحويل المعادلات (2.54 ، 2.55) الى صور رياضية اخرى ، وذلك باستخدام قانون سنل لحذف المتغير  $\phi$  ( زاوية الإنكسار ) من تلك المعادلات . وتكون هذه الصور كما يلي:

$$r_s = \frac{\cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad (2.58)$$

$$r_p = \frac{-n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad (2.59)$$

حيث :  $\cos \phi = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$  ;  $\sin \phi = \frac{\sin \theta}{n}$

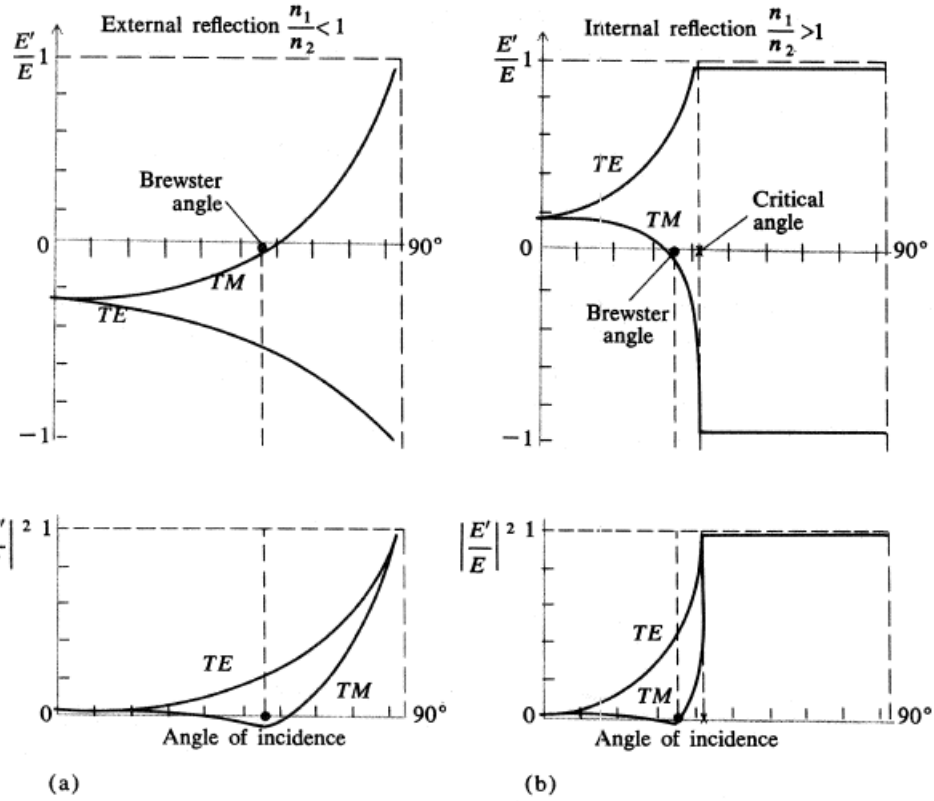
بتربيع معامل الإنعكاس ، نحصل على ما يعرف بالإنعكاسية **Reflectance** ، ويرمز لها في حالتها استقطاب الموجة الساقطة :  $R_s$  ،  $R_p$  ، اي

$$R_s = |r_s|^2 = \left| \frac{E'}{E} \right|_{TE}^2$$

$$R_p = |r_p|^2 = \left| \frac{E'}{E} \right|_{TM}^2 \quad (2.60)$$

ويمكن تمثيل العلاقة البيانية لدالة معامل الإنعكاس و الإنعكاسية مع زاوية السقوط ، في حالتها استقطاب الموجة الساقطة كما في الشكل (2.12) . اما في حالة السقوط العمودي (  $\theta = 0$  ) ، يكون مقدار الإنعكاسية كما يلي:

$$R_s = R_p = \left[ \frac{n - 1}{n + 1} \right]^2 \quad (2.61)$$



شكل (2.12) العلاقة البيانية لمعاملات الإنعكاس والإنعكاسية مع زاوية السقوط عند السطح الفاصل بين وسطين  $n_1, n_2$ .

مثال (2.3)

جد الإنعكاسية لموجة ضوئية ، عند سقوطها عموديا من الهواء ( $n_1=1$ ) على سطح فاصل زجاجي ( $n_2 = 1.5$ ) ؟ (

الحل:

$$n = \frac{n_2}{n_1} = 1.5$$

$$R_s = R_p = \left( \frac{1.5 - 1}{1.5 + 1} \right)^2 = 0.04 = 4\%$$

هذا يعني ان شدة الموجة المنعكسة تساوي 4% من شدة الموجة النافذة الى الوسط الزجاجي .

## ■ الإنعكاس الخارجي والداخلي *External & Internal Reflection*

عند انعكاس الضوء على السطح الفاصل بين وسطين ماديين ، يمكن تصنيف ظاهرة الإنعكاس الى حالتين ، وذلك حسب

مقدار معامل الإنكسار النسبي :  $n = \frac{n_2}{n_1}$  . وهاتان الحالتان هما :

(1) **الإنعكاس الخارجي** : وهذا يحدث عندما يكون  $n > 1$  ، اي عندما يسقط الضوء من الوسط الخفيف ضوئيا نحو الوسط الكثيف ضوئيا ( مثلا " ، عند ما يسقط الضوء من الهواء نحو الماء). وهنا ، تعطى سعة المجالات الكهربائية بدلالة المعادلات ( 2.54 ، 2.59 ) في حالة قيم  $\theta$  الحقيقية .

(2) **الإنعكاس الداخلي**: يحدث هذا الإنعكاس عندما يتحقق الشرط التالي :  $n < 1$  ، اي عندما يسقط الضوء من وسط كثيف ضوئيا نحو وسط خفيف ضوئيا ( من الزجاج نحو الهواء) . بإستخدام قانون سنل ، نجد ان قيم  $\theta$  التي يحدث عندها هذا الإنعكاس يجب ان تحقق الشرط التالي:  $\theta \geq \sin^{-1} n$  ، وهناك قيمة خاصة لزواوية السقوط  $\theta$  ، والتي تقابلها زاوية انكسار في الوسط الخفيف قدرها  $90^\circ$  ، وتسمى هذه بالزاوية الحرجة ،  $\theta_{critical}$  ، وتساوي المقدار

$\theta_{critical} = \sin^{-1} n$  . فمثلا ، عند سقوط الضوء من وسط زجاجي الى الهواء نجد ان الزاوية الحرجة هي

$$\theta_{crit.} = \sin^{-1} \left( \frac{1}{1.5} \right) = 41^\circ$$

## ■ الإنعكاس الداخلي الكلي *Total Internal Reflection*

إذا كانت قيمة  $\theta$  اكبر من القيمة الحرجة ، فإن النسبة  $\left( \frac{E'}{E} \right)$  تصبح عددا مركبا ، حيث بالرجوع الى المعادلات (2.58) - (2.59) ، نجد ان الكمية تحت اشارة الجذر التربيعي تكون سالبة لقيم  $\theta$  التي تحقق الشرط:  $\theta > \sin^{-1} n$  . وفي هذا المدى من قيم  $\theta$  تكون قيم معاملات الإنعكاس كما يلي:

$$r_s = \frac{\cos \theta - i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\cos \theta + i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}} \quad (2.62)$$

$$r_p = \frac{-n^2 \cos \theta + i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{n^2 \cos \theta + i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}} \quad (2.63)$$

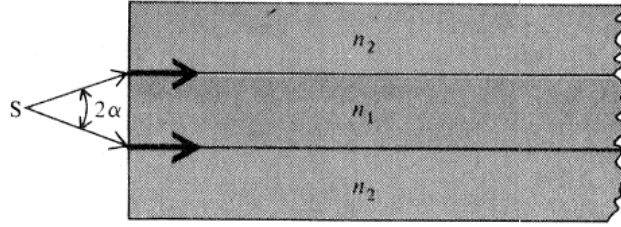
ويعرف هذا الإنعكاس بالإنعكاس الداخلي الكلي ، ويكون شرط حدوثه  $\theta > \sin^{-1} \theta_{crit.}$  . في هذه الحالة ، يكون مقدار الإنعكاسية يساوي الوحدة ، او  $R = 1$  ، ويمكن اثبات ذلك كما يلي:

$$\begin{aligned} R &= |r_s|^2 = r_s r_s^* \\ &= \left\{ \frac{\cos \theta - i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\cos \theta + i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}} \right\} \left\{ \frac{\cos \theta + i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\cos \theta - i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}} \right\} \end{aligned}$$

$$R = \frac{1 - n^2}{1 + n^2} = 1$$

### ▪ الإلياف البصرية *Optical Fibers*

من اهم التطبيقات العملية لظاهرة الإنعكاس الداخلي الكلي هي عملية نقل الشعاع الضوئي خلال ما يعرف بالليف البصري . ويتكون الليف البصري من انبوبة اسطوانية الشكل تسمى قلب الليف *core* وهي مصنوعة من مادة شفافة ( مادة بلاستيكية او زجاجية ) لمنع امتصاص الطاقة الضوئية اثناء انتقال الضوء ( الموجة ) خلالها . وتكون هذه الأسطوانة مغلقة تماما بطبقة من مادة عازلة تسمى طبقة الغلاف *Cladding Layer* . وعادة يكون قطر الليف البصري بضع ميكرونات ( $\sim \mu$ ) تقريبا . وحتى يبقى الضوء محصورا داخل قلب الليف ، يجب ان يكون معامل انكسار مادة القلب ( $n_1$ ) اكبر من معامل انكسار طبقة الغلاف ( $n_2$ ) ، ويجب ان يسقط الضوء على السطح الفاصل بين القلب والغلاف بزوايا أكبر من الزاوية الحرجة ( كما سبق شرحه ) ، و يتطلب هذا الشرط دخول الضوء من فتحة الليف ( النافذة ) بزوايا محددة تسمى **زاوية القبول *acceptance angle*** ، وهي تساوي نصف زاوية رأس مخروط الأشعة الضوئية المنبعثة من المصدر ( $2\alpha$ ) الذي تكون قاعدته هي نافذة هذا الليف ( الشكل 2.13).



شكل (2.13) : ليف بصري يمرر شعاع ضوئي مصدره S موضوع في الهواء.

لأيجاد زاوية  $\alpha$  ، نطبق قانون سنل مرتين: اولا عند السطح الفاصل بين الهواء ومادة قلب الليف ، حيث نجد ان:

$$1 \times \sin \alpha = n_1 \cos \phi_1 = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \phi_1}$$

ثانيا ، عند السطح الفاصل بين القلب والغلاف وفي حالة الزاوية الحرجة ، اي

$$n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin 90 \Rightarrow \sin \phi_1 = \frac{n_2}{n_1}$$

وعليه ، يكون

$$\sin \alpha = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

يسمى المقدار  $\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$  الفتحة العددية لليف (Numerical Aperture (NA) .

مثال (2.4)

إذا كان معامل انكسار مادتي قلب ليف بصري وغلافه كما يلي: 1.53، 1.55 على الترتيب . جد زاوية قبول الأشعة الضوئية لهذا الليف ، ثم جد الفتحة العددية له ؟

الحل:

$$\alpha = \sin^{-1} \sqrt{(1.55)^2 - (1.53)^2} = 14.3706^\circ$$

$$NA = \sqrt{(1.55)^2 - (1.53)^2} = 0.2482$$

▪ زاوية بريوستر Brewster Angle

بالرجوع الى معادلة (2.59) ، التي تعطي النسبة بين سعتي المجال الكهربائي للموجة المنعكسة والساقطة في حالة استقطاب الموجة المستعرضة مغناطيسيا (TM) ، نجد ان معامل الإنعكاس ( $r_p$ ) تساوي صفرا اذا تحقق الشرط التالي:

$$-n^2 \cos \theta = \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}$$

ويحل هذه المعادلة ، نجد ان :

$$\theta = \tan^{-1} n \quad (2.64)$$

وتسمى هذه الزاوية التي تحقق هذا الشرط بزاوية بريوستر Brewster Angle ، فمثلا ، في حالة الإنعكاس الخارجي للضوء ( من الهواء الى الزجاج ) ، يكون مقدار زاوية بريوستر كما يلي:

$$\theta_{Brewster} = \tan^{-1}(1.5) = 57^\circ$$

وفي حالة الإنعكاس الداخلي ( من الزجاج الى الهواء ) ، تكون هذه الزاوية كالتالي:

$$\theta_{Brewster} = \tan^{-1}(1/1.5) = 33^\circ$$

ويختلف مقدار زاوية بريوستر باختلاف طول موجة الشعاع الساقط ، وذلك يعود الى ظاهرة التفريق اللوني Dispersion في الوسط الزجاجي.

عند سقوط شعاع ضوئي غير مستقطب على سطح فاصل بزواوية تساوي زاوية بربوستر ، فإن الشعاع المنعكس يكون مستقطبا خطيا ، بحيث يكون متجه المجال الكهربائي للموجة المنعكسة مستعرضا مع مستوى السقوط ، ويكون الشعاع النافذ مستقطبا جزئيا . عمليا ، يمكن ان تستخدم هذه التقنية ( الإنعكاس بزواوية بربوستر) للحصول على ضوء مستقطب ، ولكن تكون شدة هذا الضوء المنعكس ضعيفة ( في حالة السقوط من الهواء الى الزجاج ، ينعكس 15% فقط من شدة الضوء الساقط ) ، مما يجعل هذه التقنية غير فعالة مقارنة مع التقنيات الأخرى .

### (2.8) الموجة المتلاشية ( المضمحلة ) في الإنعكاس الكلي *The Evanescent wave in Total Reflection*

في حالة الإنعكاس الكلي ، يمكن القول نظريا ، ان الموجة الكهرومغناطيسية الساقطة على السطح الفاصل ( من وسط كثيف الى وسط خفيف ) تنعكس كليا ، اذا كانت زاوية السقوط اكبر من الزاوية الحرجة . ولكن عمليا ، لا يزال هناك تواجد للمجال الكهربائي خلف الحدودية *Boundary* او الوسط الفاصل ، وتسمى هذه الموجة في الوسط الخفيف بالموجة المتلاشية ( المضمحلة ) *Evanescent wave* . ويمكن برهان ذلك رياضيا كالتالي:

نترض ان متجه المجال الكهربائي للموجة النافذة الى الوسط الخفيف ( خلف السطح الفاصل ) كما يلي:

$$\mathbf{E}_{\text{trans}} = \mathbf{E}'' e^{i(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

عند اختيار محاور احداثية كما في الشكل (2.10) ، نجد ان :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} &= k'' x \sin \phi - k'' y \cos \phi \\ &= k'' x \sin \phi - ik'' y \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n^2} - 1} \end{aligned} \quad (2.65)$$

حيث استخدام قانون سنل في الخطوة الأخيرة لإشتقاق هذه المعادلة ، او

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{n^2}} = i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n^2} - 1} \quad (2.66)$$

ونلاحظ ان مقدار  $\cos \phi$  يساوي كمية تخيلية *Imaginary value* في حالة الإنعكاس الكلي الداخلي . وتكون دالة الموجة لمتجه المجال الكهربائي في الموجة النافذة كما يلي:

$$\mathbf{E}_{\text{trans}} = \mathbf{E}'' e^{-\alpha|y|} e^{i(k_1 x - \omega t)} \quad (2.67)$$

حيث :



$$\alpha = k'' \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{n^2} - 1}$$

$$k_1 = \frac{k'' \sin \theta}{n}$$

في معادلة (2.67) ، يمثل المعامل  $e^{-\alpha|y|}$  سعة الموجة المتلاشية عند عمق  $y$  في الوسط الخفيف ، ونلاحظ ان هذه السعة تتناقص أسيا كلما زاد مقدار الإختراق في هذا الوسط . اما الدالة الأسية المركبة ،  $e^{i(k_1x - \omega t)}$  ، فهي تعني ان هذه الموجة المتلاشية يمكن ان توصف بدلالة **سطوح ثابتة الطور** *constant phase* وتتحرك بسرعة طورية  $\frac{\omega}{k_1}$  ، ونلاحظ ان هذه السرعة تكون اكبر من سرعة طور الموجة المستوية الساقطة بمقدار يساوي  $1/\sin \theta$ .

### (2.9) تغيرات الطور في الإنعكاس الداخلي الكلي *Phase Change in Total Internal Reflection*

في حالة الإنعكاس الداخلي الكلي ، تتضمن القيم المركبة لمعاملات الإنعكاس والمعطاة في المعادلات (2.62-2.63) ، حدوث تغيرا في طور الموجة المنعكسة ، ويعتمد هذا التغير على زاوية السقوط . ولحساب هذا التغير في الطور ، نتبع الخطوات التالية :

حيث ان القيم المطلقة *absolute values* لمعاملات إنعكاس موجة ساقطة من وسط كثيف الى وسط خفيف ،  $r_s$  ،  $r_p$  ، تساوي الواحد الصحيح ، فيمكن التعبير عن هذه المعاملات كما يلي:

$$r_s = e^{-i\delta_s} = \frac{ae^{-i\alpha}}{ae^{+i\alpha}} \quad (2.68)$$

$$r_p = -e^{-i\delta_p} = -\frac{be^{-i\beta}}{be^{+i\beta}} \quad (2.69)$$

حيث :  $\delta_s$  ،  $\delta_p$  تمثل التغيرات في طور الموجات المستعرضة لحالتي الإستقطاب *TE, TM*. كما تكون الأعداد المركبة :  $ae^{-i\alpha}$  ،  $be^{-i\beta}$  ، تساوي البسوط *Numerators* في معادلات (2.62-2.63) على الترتيب ، وعليه ، تكون المرافقات المركبة لمقامات هذه المعادلات كما يلي:

$$ae^{i\alpha} = \cos \theta + i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}$$

$$be^{i\beta} = n^2 \cos \theta + i \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}$$

لإيجاد العلاقة بين  $\alpha$  ،  $\delta_s$  ، ننطق المقام في معادلة (2.68) ، ونحصل على التالي:

$$\delta_s = 2\alpha \Rightarrow \tan \alpha = \tan \frac{\delta_s}{2}$$

$$\delta_p = 2\beta \Rightarrow \tan \beta = \tan \frac{\delta_p}{2}$$

وعليه ، تكون التغير في الطور والناتج بسبب الإنعكاس الداخلي الكلي كالتالي:

$$\tan \frac{\delta_s}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\cos \theta} \quad (2.70)$$

$$\tan \frac{\delta_p}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{n^2 \cos \theta} \quad (2.71)$$

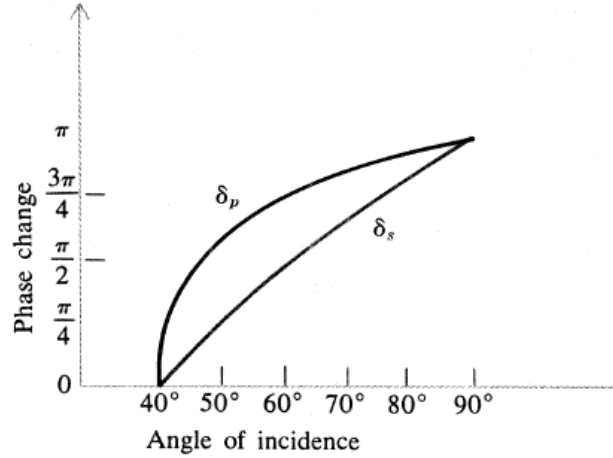
لنفرض ان فرق التغيرات في طور الموجات ،  $\Delta$  ، لحالتي الإستقطاب المستعرض ، فيمكن التعبير عنه كما يلي :

$$\Delta = \delta_p - \delta_s \Rightarrow \tan \left( \frac{\Delta}{2} \right) = \tan \left( \frac{\delta_p - \delta_s}{2} \right)$$

باستخدام المتطابقة المثلثية للزاوية لظل الزاوية المركبة ، ومعادلتني (2.70-2.71) ، وبعض الخطوات الجبرية للنتائج ، نجد ان :

$$\tan \frac{\Delta}{2} = \frac{\cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\sin^2 \theta} \quad (2.72)$$

ويمكن تمثيل هذه التغيرات في طور الموجة، في حالة الإنعكاس الداخلي الكلي (من الزجاج الى الهواء) ، حيث معامل انكسار الزجاج 1.5 ، كدالة لزاوية السقوط كما في الشكل (2.14) .



شكل (2.14): تغيرات طور الموجات المنعكسة داخليا كدالة لزاوية السقوط (من الزجاج الى الهواء).

## (2.10) مصفوفة الإنعكاس Reflection Matrix

لنفرض ان مكونات الموجة المنعكسة والمستعرضة مغناطيسيا  $TM$  تقع في الإتجاه الأفقي ، بينما تقع الموجات المنعكسة والمستعرضة كهربيا في الإتجاه العمودي . وعليه ، يمكن تعريف مصفوفة جونز بدلالة مصفوفة الإنعكاس كما يلي:

، ويكون متجه جونز لهذا الضوء المنعكس كالتالي:  $\begin{bmatrix} -r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -r_p & 0 \\ 0 & r_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

حيث تمثل المصفوفة  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$  متجه الضوء الساقط على السطح الفاصل بين الوسيطين ، بينما تعطى معاملات الانعكاس:  $r_p$  ،  $r_s$  بدلالة زاوية السقوط ، كما في معادلتني (2.58 – 2.59) .

وبالمثل ، يمكن تعريف مصفوفة النفاذ *Transmission Matrix* كالتالي:

$$\begin{bmatrix} t_p & 0 \\ 0 & t_s \end{bmatrix} ، ويكون متجه جونز للضوء النافذ كما يلي:$$

$$\begin{bmatrix} t_p & 0 \\ 0 & t_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'' \\ B'' \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

وكمثال على ذلك ، نستعرض الانعكاس في حالة السقوط العمودي :

لنفرض ان  $n$  معامل الانكسار النسبي ، يعطي التعويض بقيم معاملات الانعكاس مصفوفة الانعكاس التالية:

$$\begin{bmatrix} -(1-n)/(1+n) & 0 \\ 0 & (1-n)/(1+n) \end{bmatrix} = \frac{1-n}{1+n} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لنفرض ان الضوء الساقط مستقطب دائريا يمينيا (*Right Circularly Polarized (RCP)*) ، ويمثل متجه جونز لهذا الضوء بالمصفوفة التالية:  $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$  ، وعليه ، يكون متجه جونز للضوء المنعكس كالتالي:

$$\frac{1-n}{1+n} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{1-n}{1+n} \begin{bmatrix} -1 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{n-1}{n+1} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

تعني هذه النتيجة ان الضوء المنعكس يكون مستقطبا دائريا يساريا (*Left Circular Polarized (LCP)*) ، و تتغير سعته بالمقدار  $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$  .

وبالمثل ، يمكن اثبات التالي : اذا كان الضوء الساقط والمستقطب دائريا يساريا ، فإن الضوء المنعكس عن السطح الفاصل يكون مستقطبا بشكل دائري يميني .

اما في حالة الانعكاس الداخلي الكلي ، حيث:  $r_p = -e^{-\delta_p}$  ،  $r_s = e^{-\delta_s}$  ، فيمكن تمثيل هذه العملية الانعكاسية كالتالي:

$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\delta_p} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ae^{-i\delta_p} \\ Be^{-i\delta_s} \end{bmatrix} = e^{-i\delta_p} \begin{bmatrix} A \\ Be^{i\Delta} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

حيث يعطى مقدار  $\Delta$  باستخدام المعادلة (2.72). وعلى العموم، يكون الضوء المنعكس مستقطبا ببيضاويا *Elliptical Polarized*.

### تمارين

(2.1) برهن ان :

$$\nabla f = i k f$$

حيث :  $f = e^{i(k.r - \omega t)}$ .

(2.2) جد قيمة *rms* للمجال الكهربى في اشعاع صادر من مصباح كهربى قدرته  $100 \text{ watt}$ ، عند نقطة تبعد عنه مسافة  $1 \text{ m}$  ؟

(2.3) اذا كانت القيمة العظمى لقدرة شعاع ليزر  $100 \text{ MW}$ ، وتم تسليط هذا الشعاع على بقعة قطرها  $1 \mu$ ، جد سعة المجال الكهربى لموجة الضوء، علما ان معامل انكسار الوسط  $n = 1$  ؟

(2.4) اثبت ان معدل تدفق بويننج يعطى بالعلاقة التالية :

$$\frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*)$$

(2.5) اذا كانت شدة المجال الكهربى تعطى كما يلى :

$$\mathbf{E} = E_0[\hat{\mathbf{i}} \cos(kz - \omega t) + \hat{\mathbf{j}} b \cos(kz - \omega t + \phi)]$$

برهن ان التعبير الرياضى المكافئ لهذ المجال يكون كما يلى:

$$\mathbf{E} = E_0(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} b e^{i\phi}) e^{i(kz - \omega t)}$$

(2.6) بين نوع الإستقطاب للموجة في السؤال (2.5) لكل من الحالات التالية:

- (a)  $\phi = 0, b = 1$
- (b)  $\phi = 0, b = 2$
- (c)  $\phi = \pi/2, b = -1$
- (d)  $\phi = \pi/4, b = 1$

(2.7) جد متجه جونز للموجات المعطاة في سؤال (2.6) ؟

(2.8) حدد نوع الإستقطاب للموجات التي تمثلها متجهات جونز التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1-i \\ 1+i \end{bmatrix}$$

ثم جد متجهات جونز المتعامدة مع هذه المتجهات ؟.

(2.9) في الحالة العامة ، اذا كان متجه جونز الممثل لموجة مستقطبة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} A \\ B e^{i\Delta} \end{bmatrix}$$

اثبت ان هذا المتجه يمثل موجة مستقطبة ببيضاويا ، حيث المحور الرئيسي للقطع البيضاوي يصنع زاوية مع محور  $x$  مقدارها كالتالي:

$$\frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2AB \cos \Delta}{A^2 - B^2} \right)$$

(2.10) بإستخدام تفاضل جونز ، بين ان الضوء المستقطب دائريا ينتج من عملية مرور ضوء غير مستقطب خلال مقطب خطي ومن ثم يمرر هذا الضوء النافذ خلال لوحة ربع موجي على الترتيب ؟.

(2.11) برهن ان المقطب الدائري الذي له مصفوفة جونز :  $\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$  ، يكون تام الشفافية لنوع واحد من الضوء المستقطبي دائريا ( يميني او يساري ) بينما يكون معتما للضوء المستقطب دائريا والمضاد للنوع الأول ؟

(2.12) اذا مر ضوء مستقطبا خطيا - افقيا ، حيث يمثله متجه جونز :  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  ، خلال مقطبين خطيين ، الأول : يصنع محور نفاذه زاوية  $45^0$  ، بينما يصنع محور نفاذ الثاني  $90^0$  . برهن ان الضوء النافذ منهما يكون مستقطبا خطيا في الإتجاه الرأسي ؟ .

(2.13) جد القيم الخاصة والمتجهات الذاتية المقابلة لمقطب خطي ، حيث يصنع محور نفاذه  $45^0$  ؟.

(2.14) جد الزاوية الحرجة لإنعكاس داخلي من الماء ( $n = 1.33$ ) الى قطعة من الماس ( $n = 2.42$ ) ؟

(2.15) جد زاوية بريوستر للإنعكاس الخارجي من الماء الى الماس في السؤال (2.14) ؟

(2.16) جد مقدار الإنعكاسية للموجات المستقطبة  $TE, TM$  عند سقوطها من الماء نحو الماس بزواوية سقوط  $45^0$  ؟

(2.17) اذا كانت الزاوية الحرجة للإنعكاس الكلي الداخلي في وسط ما  $45^0$  ، جد زاوية بريوستر في حالة الإنعكاس الخارجي في هذا الوسط ؟

(2.18) اشتق العلاقة الرياضية المعطاة في بند ( 2.10 ) وهي :

$$\tan \frac{\Delta}{2} = \frac{\cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\sin^2 \theta}$$

---

## Coherence and Interference

سنتناول في هذا الفصل مبادئ التداخل بين الموجات المنتشرة في الوسط ، وندرس التجارب العملية والأجهزة التي تعتمد في عملها على ظاهرة التداخل . كما نشرح مفهوم التطاور بين الأمواج وانواع هذا التطاور ، واتساع خط الطيف ومطياف تحويل فورييه .

### (3.1) قاعدة التراكم الخطي The Principle of Linear Superposition

تنص قاعدة التراكم الخطي على ما يلي:

يكون المجال الكهربائي المحصل لعدة مجالات كهربائية مختلفة والتي تلتقي عند نقطة ما في الفضاء مساويا للمجموع الإتجاهي لهذه المجالات . ويعبر عن ذلك رياضيا كما يلي:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{(1)} + \mathbf{E}_{(2)} + \mathbf{E}_{(3)} + \dots \quad (3.1)$$

حيث  $\mathbf{E}$  يمثل متجه المجال الكهربائي المحصل ،  $\mathbf{E}_{(1)}, \mathbf{E}_{(2)}, \mathbf{E}_{(3)}$  تمثل متجهات المجالات الكهربائية المترابطة. و ينطبق هذا المبدأ أيضا في حالة المجالات المغناطيسية.

لنعتبر موجتين توافقيتين خطيتين ومستقطبتين خطيا ، ولهما نفس التردد  $\omega$  ، حيث يعبر عن متجه المجال الكهربائي لكل منهما بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(1)} &= \mathbf{E}_1 \exp i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_1) \\ \mathbf{E}_{(2)} &= \mathbf{E}_2 \exp i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

إذا كان فرق الطور بين هاتين الموجتين يساوي مقدار ثابت ، او

$$\phi_1 - \phi_2 = \text{ثابت}$$

نقول ان مصدرتي تلك الموجتان في حالة تطاور متبادلي mutually coherent . سنعرض في هذا البند تحليلا لهذا النوع من الأمواج ذات التطاور المتبادلي.

كما سبق شرحه في البند (2.2) ، تتناسب الإشعاعية *irradiance* مع مربع سعة موجة المجال الكهربائي عند نقطة ما في الوسط . وعليه ، فإن قاعدة تراكم الموجتين (معادلة 3.2) المستويتين تعطي دالة انشعاعية كما يلي:

$$\begin{aligned} I &= |\mathbf{E}|^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = (\mathbf{E}_{(1)} + \mathbf{E}_{(2)}) \cdot (\mathbf{E}_{(1)}^* + \mathbf{E}_{(2)}^*) \\ &= |\mathbf{E}_1|^2 + |\mathbf{E}_2|^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \cos \theta \\ &= I_1 + I_2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \cos \theta \end{aligned} \quad (3.3)$$

حيث

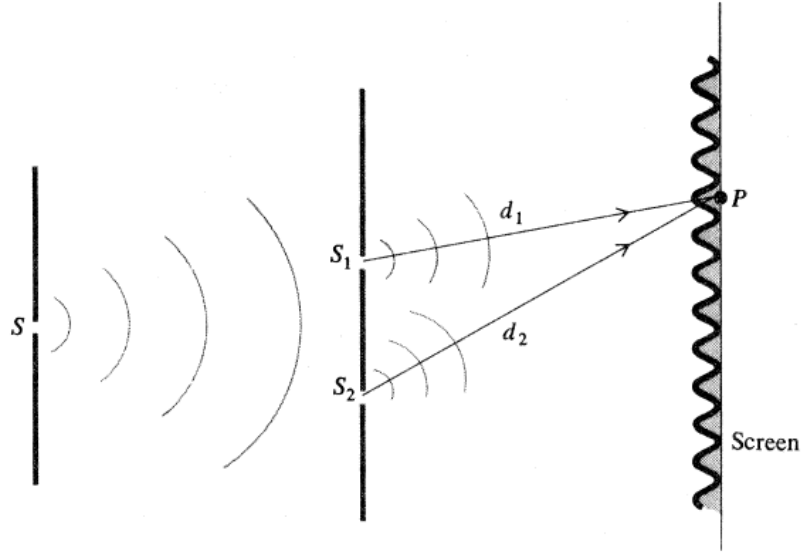
$$\theta = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \phi_1 - \phi_2 \quad (3.4)$$

في معادلة (3.3) ، يعرف الحد  $2E_1.E_2 \cos \theta$  بحد التداخل *Interference Term* . ويشير هذا الحد الى ان مقدار الإشعاعية قد يكون اقل او اكبر من المقدار  $I = I_1 + I_2$  ، ويعتمد هذا الاختلاف على قيمة  $\theta$  ، وبما ان هذه القيمة تعتمد على متجه الموقع النقطة  $r$  ، فإنه ينتج عن ذلك تغيرات مكانية دورية في مقدار الشدة الإشعاعية المحصلة . وعليه ، تظهر هذه التغيرات على صورة ما يسمى بالأهداب *Fringes* التداخلية المألوفة ( كما يوضح لاحقا ) .

اما اذا كان مصدرا الأمواج غير متطاوره ، بمعنى ان مقدار فرق الطور ،  $\phi_1 - \phi_2$  ، يتغير عشوائيا مع الزمن ، فلا يشاهد اي نمط التداخل . اي ، لا يحصل تداخل في حالة استخدام المصادر الضوئية غير المستقطبة . كذلك لا يشاهد اي نمط للتداخل اذا كان استقطاب المصدرين متعامدا ، اي  $E_1.E_2^* = 0$  .

### (3.2) تجربة يونج Young Experiment

في عام 1882 ، اجرى العالم توماس يونج اول تجربة للحصول على نمط تداخل ، حيث استخدم مصدر ضوئي موضوع خلف حاجز به ثقب ضيق *pinhole* ، وذلك للحصول على مصدر نقطي الذي يصدر موجة كروية لتنتشر خلف هذا الحاجز . ثم تسقط هذه الموجة على حاجز به شقان ضيقان *slits* هما  $s_1$  ،  $s_2$  ، (كما في الشكل 3.1) . ويصبح هذان الشقان مصدرين للأمواج المتطاوره ، وفقا لنظرية هيجنز *Huygens* ، لأنهما يقعان على نفس مقدمة الموجة الكروية . ويوضع خلف هذا الحاجز وعلى بعد ما عنه ستارة *screen* لتتراكب الموجات الضوئية عند النقاط الواقعة في مستوى الستارة ، وينتج عن ذلك نمط التداخل على صورة الشقين الضيقين على هذه الستارة . بمعنى ، اذا كان هذان الشقان مستطيلي الشكل ، يكون نمط التداخل على صورة اشربة مضيئة ومعتمة ، على الترتيب ، وتسمى بأهداب التداخل .



شكل (3.1) : الترتيب الهندسي لتجربة يونج.

#### ■ التحليل الرياضي لنتائج تجربة يونج:

لنفرض ان الموجتين الصادرتين من المصدرين:  $s_1$  ،  $s_2$  تتراكبان عند النقطة P الواقعة على الشاشة . ولنفرض ان بعد هذه النقطة عن المصدرين هما:  $d_1$  ،  $d_2$  . وعليه ، يكون فرق الطور بين الموجتين المتداخلتين كما يلي:

$k(d_2 - d_1)$  . بالرجوع الى معادلة (3.3) ، نجد ان الشدة المحصلة لتراكب الموجتين تكون عظمى اذا تحقق الشرط التالي:



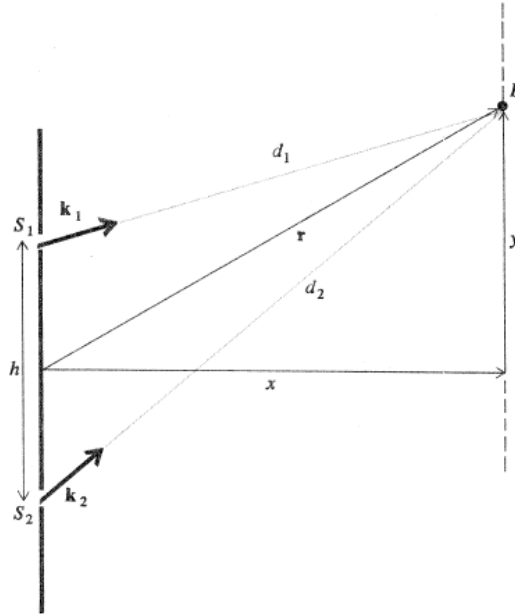
$$k(d_2 - d_1) = \pm 2n\pi \quad (3.5)$$

حيث  $n$  عدد صحيح . بما ان :  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  ، تصبح معادلة (3.5) على الصورة التالية:

$$|d_2 - d_1| = n\lambda \quad (3.6)$$

فيزيائيا ، يكون عند اي نقطة على الشاشة شدة عظمى ( هذب مضيء ) و يسمى هذا التداخل بالتداخل البناء ، و شرط الحصول على هذا النوع من التداخل ان يكون فرق المسار الهندسي بين تلك النقطة والمصدرين يساوي عدد صحيح من طول الموجة . يمكن التعبير عن هذا الشرط بدلالة المتغيرات الهندسية المعطاة في التجربة كما يلي:

لنفرض ان  $h$  = البعد بين الشقين ،  $x$  = البعد بين الشاشة وحاجز الشقين ( الشكل 3.2 ) ،  $y$  = البعد الراسي للنقطة P عن المحور الأفقي المركزي .



شكل (3.2) المعاملات الهندسية في تجربة يونج .

باستخدام نظرية فيثاغورس ، نحول معادلة (3.6) الى الصيغة التالية:

$$\left[ x^2 + \left( y + \frac{h}{2} \right)^2 \right]^{1/2} - \left[ x^2 + \left( y - \frac{h}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = n\lambda \quad (3.7)$$

على فرض ان  $y, h \ll x$  ، يمكن تبسيط معادلة (3.7) باستخدام التقريب التالي :

$$\left[ x^2 + \left( y + \frac{h}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = x \left[ 1 + \left( \frac{y + h/2}{x} \right)^2 \right]^{1/2} = x \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{y + h/2}{x} \right)^2 + \dots \right]$$

وبالمثل ، نجد ان

$$\left[ x^2 + \left( y - \frac{h}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = x \left[ 1 + \left( \frac{y - h/2}{x} \right)^2 \right]^{1/2} = x \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{y - h/2}{x} \right)^2 + \dots \right]$$

وعليه ، تؤول معادلة (3.7) الى التالي:

$$\frac{yh}{x} = n\lambda \quad (3.8)$$

هذا يشير الى ان مواقع الشدة العظمى ( الأهداب المضئية ) يكون عند نقاط الشاشة التالية:

$$y = 0, \pm \frac{\lambda x}{h}, \pm \frac{2\lambda x}{h}, \dots \quad (3.9)$$

**ملاحظة :**  $n=0$  يمثل ترتيب الهدب المركزي (فوق الخط الأفقي) ،  $n = \pm 1$  يمثل ترتيب الهدب المضئيء الأول ( موقع النهاية العظمى الأولى *first order maxima* ) اعلى واسفل الهدب المركزي ، وهكذا ....

### مثال (3.1)

يمر ضوء من خلال حاجز به شقين ضيقين ( تجربة يونج ) البعد بينهما  $0.88mm$  ، اذا شوهد نمط تداخل على شاشة تبعد عن هذا الحاجز مسافة  $1.6 m$  ، كما وجد ان الهدب المضئيء الثاني يبعد مسافة  $2.5 mm$  عن الخط المركزي ، جد طول موجة الضوء المستخدم في التجربة ؟ .

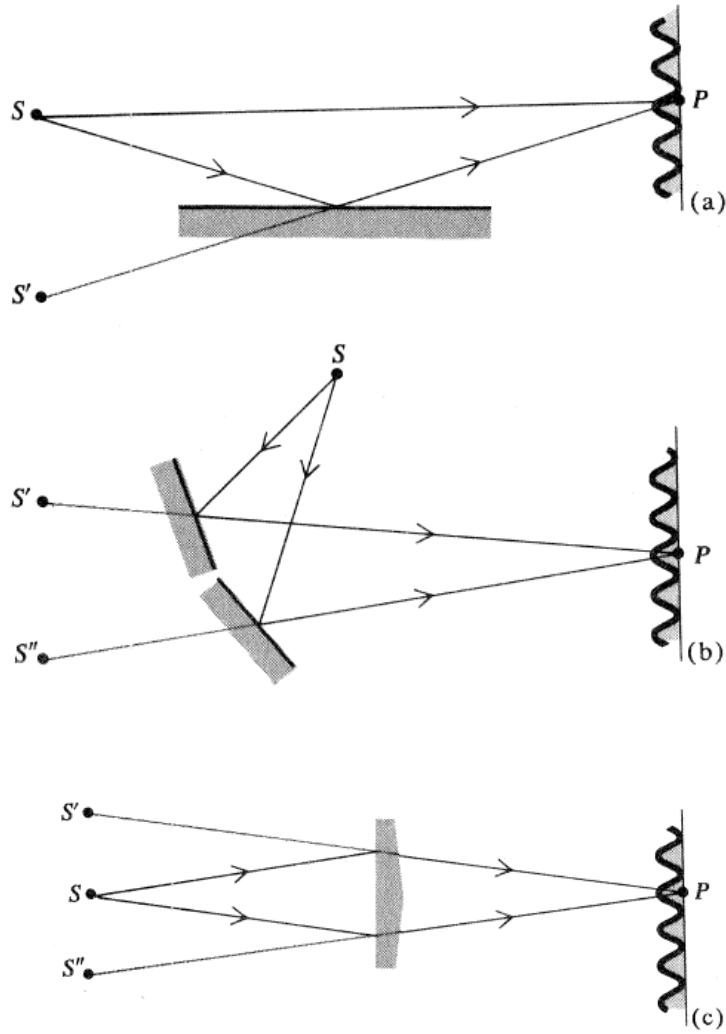
### الحل

باستخدام معادلة (3.9) ، نجد ان:

$$\lambda = \frac{yh}{nx} = \frac{(0.88mm)(2.5 mm)}{(2)(1600 mm)} = 625 \times 10^{-9}m$$

### ▪ طرق بديلة لمشاهدة انماط التداخل :

بعد تجربة يونج ، تم تطوير عدة تصاميم عملية للحصول على انماط التداخل ، وتعتبر هذه الأجهزة محاكاة لتجربة يونج للحصول على مصدرين متطاورين ، بحيث يكون المصدر الأصلي هو احد المصدرين ، بينما يكون المصدر الآخر الصورة الخيالية للمصدر الأول والتي تتكون بالانعكاس او بالإنكسار ( الشكل 3.3).



شكل (3.3) (a) مرآة ليوييد (b) مرآتا فرنل (c) منشور فرنل .

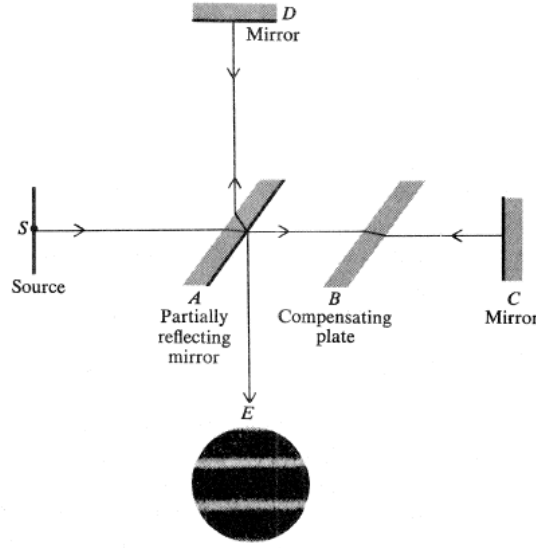
كمثال على مبدأ عمل هذه الأجهزة ، نعتبر مرآة ليوييد Lloyd's mirror ، حيث يسقط الشعاع الأول من المصدر S الى الشاشة مباشرة ، بينما يسقط شعاع آخر من نفس المصدر على المرآة وينعكس هذا الشعاع ليصل الى الشاشة ، مكونا صورة خيالية للمصدر الحقيقي ( S' ) . يتراكب هذان الشعاعان ، القادمان من المصدر الحقيقي S والمصدر الخيالي S' على الشاشة عند النقطة P ، لنحصل على نمط التداخل كما في حالة تجربة يونج . تكون المعالجة الرياضية لتحديد مواقع الشدة العظمى كما في تجربة يونج ، ولكن في هذه الحالة يجب الأخذ بعين الاعتبار التغير في طور الشعاع الثاني المنعكس ( من الهواء الى السطح الفاصل ) ومقداره  $\pi$  ( او فرق مسار  $= \frac{\lambda}{2}$  ) .

تعتمد كل التصاميم السابقة للحصول على انماط التداخل ، تجربة يونج .... ، على مبدأ تقسيم مقدمة الموجة wave front division ، ولاحقاً تم تطوير اجهزة تداخل ، تعتمد في عملها على تقسيم سعة الموجة division of amplitude ، حيث يقسم الشعاع الواحد الى شعاعين او اكثر بواسطة الانعكاس الجزئي ، وتتداخل هذه الأشعة المتطورة لتعطي نمط

التداخل المطلوب. وكمثال على هذه الأجهزة ، نتناول وصفا لمقياس ميكلسون التداخلي *Michelson Interferometer*

### (3.3) مقياس ميكلسون التداخلي *Michelson Interferometer*

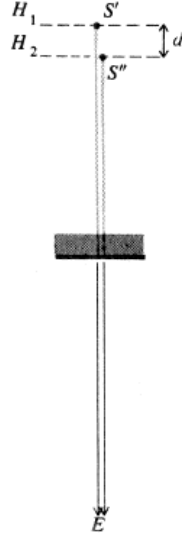
في عام 1880 استطاع العالم ميكلسون تطوير مقياس جديد لملاحظة نمط التداخل ، وذلك بإستخدام مصدر ضوئي ممتد *Extended source* ، كما هو موضح في الشكل (3.4) .



شكل (3.4) المسارات الضوئية في مقياس ميكلسون التداخلي.

ويمكن توضيح المسارات الضوئية للأشعة المتداخلة كما يلي:

يسقط الشعاع المنبعث من المصدر  $S$  على لوح زجاجي ، سطحه الخلفي نصف مفضض *half-silvered* ، ويكون هذا اللوح مائلا بزاوية  $45^0$  عن مسار هذا الشعاع ، وذلك لجعل الشعاع ينعكس جزئيا عن هذا السطح ويسير في الإتجاه الرأسي نحو المرآة الأفقية (  $D$  ) . بينما ينفذ الجزء الثاني من الشعاع الأصلي افقيا نحو المرآة العمودية  $C$  ، ويعترض هذا الشعاع اثناء مساره نحو  $C$  لوحا زجاجيا شفافا ومائلا بزاوية  $45^0$  مع اتجاه مساره، ويسمى هذا اللوح **باللوح المعوض**، حيث انه يعمل على مساواة المسارات الضوئية للأشعة المتداخلة في مجال الرؤية  $E$  . وتتم ملاحظة نمط التداخل عند الموقع  $E$  ، وكأن الأشعة قادمة من مصادر ضوئية خيالية  $s', s''$  والواقعة في المستويات المتطاورة  $H_1, H_2$  ( الشكل (3.5) .



شكل (3.5) مستويات المصادر الخيالية في مقياس ميكلسون.

لنفرض ان  $d$  تمثل المسافة بين المصدرين  $S', S''$  . وعليه ، باستخدام معادلتني (3.3، 3.4) نجد ان الإنشعاعية عند النقطة  $P$  تتناسب مع المقدار التالي:

$$1 + \cos \theta = 1 + \cos kd = 1 + \cos \frac{2\pi d}{\lambda} \quad (3.10)$$

### اعتبارات عملية : Practical Considerations

لنعتبر بعض الملاحظات المتعلقة بالمشاهدات العملية عند اجراء عملية تداخل الضوء في مقياس ميكلسون التداخلي وهي كما يلي:

(1) اذا كانت المسافة المحورية بين المرآتين والسطح الخلفي للوح  $A$  متساوية ، فإن الصورة  $C'$  تنطبق على المرآة  $D$  ، وتكون اطول مساري الشعاعين المتداخلين عند  $E$  متساوية . وعليه ، يتوقع ان نحصل على تداخل بناء ( شدة عظمية) . لكن عمليا ، لا يحدث هذا ، وذلك بسبب التغير في طور الشعاع المنعكس خارجيا ( هواء الى زجاج) بمقدار  $\pi$  ، بينما لا يحدث هذا التغير للشعاع المنعكس داخليا ( زجاج الى هواء) . بالرجوع الى الشكل (3.4) ، نجد ان الشعاع القادم من المرآة  $C$  ينعكس على السطح الخلفي للوح  $A$  بتغير في الطور مقداره  $\pi$  . وعليه ، نحصل على موقع شدة  $\square$  غرى ( تداخل هدام ) ، ويكون مركز الرؤيا مظلما  $dark$  .

(2) عند تحريك احد المرآتين مسافة :  $d = \frac{\lambda}{4}$  ، يتغير طول مسار الشعاع القادم من هذه المرآة بمقدار  $\frac{\lambda}{2}$  ، وذلك لأن هذا الشعاع يسير ذهابا وايابا عبر هذه الطريق ، وبذلك يتغير طوره بمقدار  $\pi$  ، وهذا يعوض التغير السابق في طوره بسبب الإنعكاس الخارجي . وعليه ، يكون الشعاعين المتداخلين في حالة تداخل بناء ( شدة عظمية) . كما ان تحريك هذه المرآة مسافة اخرى بمقدار  $\frac{\lambda}{4}$  ، نحصل على حالة من التداخل الهدام ( هذب مظلم او شدة صغرى ) . وهكذا ..... الخ .

يمكن التعبير عما سبق بعلاقة رياضية ، تعرف بمعادلة مقياس ميكلسون التداخلي ، كما يلي:

$$2d = m\lambda , \quad m = 0,1,2,3 \dots$$

(3) عند النظر الى الجهاز من خلال  $E$  وبشكل مائل ، اي بجعل خط النظر يعمل زاوية  $\alpha$  مع المحور الرأسي ( شكل 3.4) . وعليه ، تتحول معادلة ميكلسون السابقة الى الصورة التالية:

$$2d \cos \alpha = m\lambda , \quad m = 0,1,2,3 \dots$$

في حالة ثبوت الزاوية  $\alpha$  ، فإن المحل الهندسي يكون على شكل دوائر مركزها المحور الرأسي ، وتكون هذه الأهداب التداخلية متماثلة دورانيا ، وتعرف بأهداب متساوية الميل *fringes of equal incidence*.

مثال (3.2)

احسب المسافة التي تتحركها احد المرايا في جهاز ميكلسون التداخلي ، حتى يشاهد عبور 400 هدبا في مجال الرؤية ، علما ان طول موجة الضوء المستخدم في التجربة  $400nm$  ؟.

الحل:

$$2d = m\lambda \Rightarrow d = \frac{(400)(500 \times 10^{-9})}{2} = 1.0 \times 10^{-4}m = 0.1mm$$

مثال (3.3)

اذا وضعت انبوبة شفافة في احد مسارات الأشعة المتداخلة في تجربة ميكلسون ، وكان طولها  $2.5 cm$  ، وتحتوي على غاز ( $n = 1.0003$ ) . احسب عدد الأهداب التي تعبر مجال الرؤية ، علما ان  $\lambda = 600 nm$  ؟

الحل:

بما ان الذراع الآخر في الهواء ، يكون التغير في المسار الضوئي بين الشعاعين المتداخلين ، عند مرور هذه الأشعة ذهابا وإيابا ، كالتالي:

$$2(25mm)(1.0003 - 1.0) = m(600 \times 10^{-6} mm)$$

$$m = 25$$

### (3.4) نظرية التطاور الجزئي *Theory of Partial Coherence*

في البنود السابقة ، تم وصف تداخل الموجات المتطاورة كليا ، احادية اللون *monochromatic* ، وذات السعة الثابتة . ولكن ، عمليا قد يحصل التداخل بين موجات ذات سعات واطوار متغيرة مع الزمن بشكل عشوائي. وفي هذه الحالة ، يكون التدفق *flux* ، في اي لحظة وعند نقطة ما ، متقلبا *fluctuate* بسرعة . لذلك ، نعتمد على المعدل الزمني *time average* للإنشعاعية لدراسة تداخل هذه الموجات .

لنفرض ان  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$  تمثل متجهات المجالات الكهربائية في موجتين متداخلتين . لذلك ، تكون الإشعاعية عند نقطة ما في منطقة التداخل كالتالي:

$$\begin{aligned} I &= \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \rangle = \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{E}_1^* + \mathbf{E}_2^*) \rangle \\ &= \langle |\mathbf{E}_1|^2 + |\mathbf{E}_2|^2 + 2Re(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^*) \rangle \end{aligned} \quad (3.11)$$

حيث يعرف المعدل الزمني لأي كمية فيزيائية ما كالتالي:

$$\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (3.12)$$

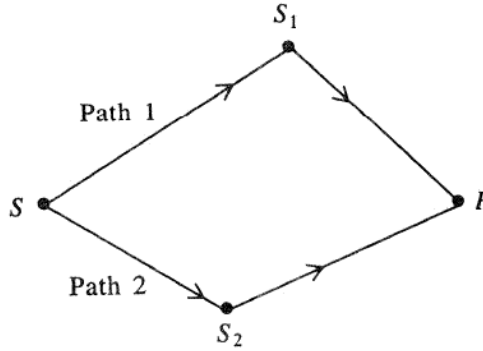
لندرس الحالة التي تكون فيها الكميات مستقرة *stationary* ، ونعني بالإستقرار ان لا يعتمد المعدل الزمني على اختيار نقطة البدء الزمنية . وايضا ، نفترض ان المجالات الضوئية في الموجات المتداخلة لها نفس الإستقطاب . وبهذه الإعتبارات ، يمكن التعبير عن معادلة (3.11) كالتالي:

$$I = I_1 + I_2 + 2Re\langle E_1 E_2^* \rangle \quad (3.13)$$

حيث ،

$$I_1 = \langle |E_1|^2 \rangle \quad I_2 = \langle |E_2|^2 \rangle \quad (3.14)$$

في تجارب التداخل الإعتيادية ، تكون هذه المجالات الكهربائية المتداخلة صادرة من نفس المصدر S ، ولكن تتخذ مسارات *Paths* مختلفة لتصل الى منطقة التداخل عند نقطة P ( الشكل 3.7).



شكل (3.7) : مسارات ضوئية مختلفة في تجارب التداخل.

لنفرض ان  $t$  تمثل الزمن الذي استغرقه وصول احد الموجات الضوئية للوصول الى P عبر المسار 1 ،

$t + \tau$  هو زمن وصول الموجة الأخرى عبر المسار 2 . وعليه ، يمكن التعبير عن حد التداخل في معادلة (3.12) بالصورة الرياضية التالية

$$2\text{Re}\Gamma_{12}(\tau)$$

حيث ،

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1(t)E_2^*(t + \tau) \rangle \quad (3.15)$$

تسمى الدالة  $\Gamma_{12}$  : دالة التطاور التبادلية *mutual coherence function* او دالة الارتباط correlation *function*. كما تعرف دالة التطاور الذاتية *self – coherence function* كالتالي:

$$\Gamma_{11}(\tau) = \langle E_1(t)E_1^*(t + \tau) \rangle$$

نلاحظ من هذا التعريف ان :

$$\Gamma_{11}(0) = I_1 \text{ and } \Gamma_{22}(0) = I_2.$$

احيانا ، يمكن باستخدام دالة الارتباط المعيارية *Normalized correlation Function* تعريف دالة تسمى بدرجة الارتباط الجزئي *degree of partial coherence* كالتالي:

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (3.16)$$

كما تعطى الإنشعاعية بالعلاقة التالية:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{Re } \gamma_{12}(\tau) \quad (3.17)$$

كما تكون دالة درجة الارتباط الجزئي دالة مركبة ودورية ، ويكون شرط الحصول على نمط تداخلي هو :

$|\gamma_{12}(\tau)| \neq 0$  . كما يمكن تصنيف انواع التطاور وفقا لحدود هذه الدالة كما يلي:



(1) تطاور تام *complete coherence* ، اذا كانت:

$$|\gamma_{12}| = 1$$

(2) تطاور جزئي *partial coherence* ، اذا كانت :

$$0 < |\gamma_{12}| < 1$$

(3) لا تطاور *incoherence* ، اذا كانت :

$$|\gamma_{12}| = 0$$

وعليه ، يكون لنمط اهداب التداخل شدة محدودة بين المقدارين التاليين :

الحد العلوي للشدة ( القيمة العظمى ):

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}|$$

و الحد السفلي للشدة :

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}|$$

.....(3.18)

كما تعرف درجة رؤيا ( و□وح ) الأهداب *fringes visibility* كما يلي:

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (3.19)$$

باستخدام معادلة (3.18) ، نجد ان

$$\mathcal{V} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}|}{I_1 + I_2} \quad (3.20)$$

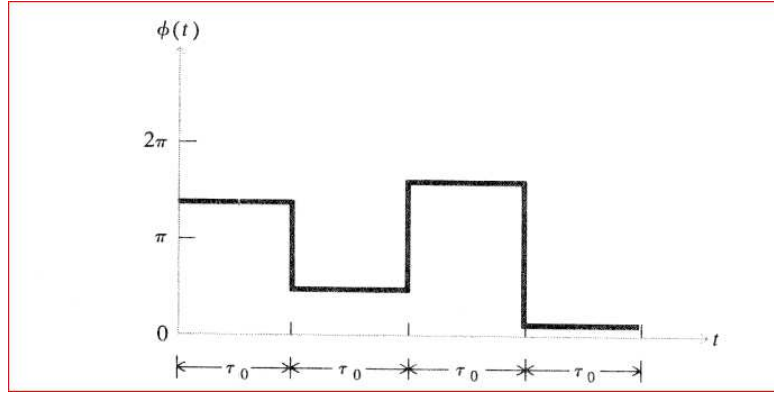
وبشكل خاص ، اذا كانت  $I_1 = I_2$  ، فإن درجة رؤيا الأهداب تصبح كما يلي:

$$\mathcal{V} = |\gamma_{12}| \quad (3.21)$$

أحيانا ، تسمى درجة رؤيا الأهداب بتباين الأهداب *contrast* ، فمثلا ، يكون التباين اعظمي في حالة التطاور التام ، ويكون مساويا للصفر في حالة اللاتطاور (لا يحدث تداخلا بين الشعاعين على الإطلاق).

### (3.5) زمن وطول التطاور *Coherence Time and Coherence Length*

لتوضيح العلاقة بين درجة التطاور الجزئي مع خصائص المصدر ، نفترض مصدرا ضوئيا ( شبيه احادي اللون *Quasi monochromatic* ) ، حيث يتغير المجال الكهربائي لموجاته جيبيا في فترة زمنية محددة،  $\tau_0$  ، وبعدها يتغير الطور بشكل فجائي، ثم يتكرر هذا التتابع بشكل غير محدد (كما في الشكل 3.8)



شكل (3.8) منحنى زاوية الطور لضوء شبيه احادي اللون.

يسمى المقدار  $\tau_0$  زمن التطاور. لنفرض ان التغير في زاوية الطور يحدث بتوزيع عشوائي بعد كل زمن من زمن التطاور وضمن المدى  $[0, 2\pi]$  . في هذه الحالة ، يمكن التعبير عن شدة المجال الكهربائي للموجة الصادرة من هذا المصدر كالتالي:

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t} e^{i\phi(t)} \quad (3.22)$$

هنا ، يمكن تمثيل زاوية الطور  $\phi(t)$  بدالة تعرف **بدالة الخطوة** *step function* عشوائية. ومن الأمثلة على هذا المصدر ، المجال الكهربائي الناتج عن التصادم بين الذرات ، حيث يتغير الطور عشوائيا بفعل هذا التصادم العشوائي.

لنفرض ان التداخل يتم بين قسمين من هذا الشعاع ( حيث المجال الكهربائي يمثل بالمعادلة 3.22 ) ، اي ان

$$|E_1| = |E_2| = |E|$$

باعتبار التطاور الذاتي ( بدون دليل الكميات ) ، يمكن التعبير عن درجة التطاور الجزئي كما يلي:

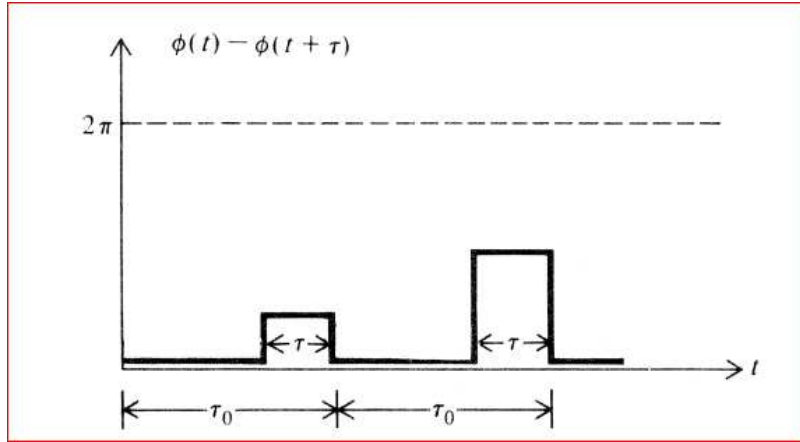
$$\gamma(\tau) = \frac{\langle E(t) E^*(t + \tau) \rangle}{\langle |E|^2 \rangle} \quad (3.23)$$

باستخدام معادلة (3.22) ، نجد ان

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= \langle e^{i\omega\tau} e^{i[\phi(t) - \phi(t + \tau)]} \rangle \\ &= e^{i\omega\tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i[\phi(t) - \phi(t + \tau)]} dt \end{aligned} \quad (3.24)$$

لدراسة العلاقة بين التغير في زاوية الطور،  $\Delta = \phi(t) - \phi(t + \tau)$  ، مع الزمن نتبع التالي:

لنفرض ان التمثيل البياني للتغير في الطور كدالة للزمن يكون كما في الشكل (3.9) ،



شكل (3.9) : منحني تغير فرق الطور مع الزمن.

من هذا الشكل (3.9) ، نلاحظ التالي:

(1) في الفترة الزمنية الأولى للتطور ،  $0 < t < \tau_0$  ، يكون فرق الطور كما يلي

$$\phi(t) - \phi(t + \tau) = 0 \quad \text{for } 0 < t < \tau_0 - \tau.$$

(2) من ناحية اخرى ، خلال الفترة الزمنية:  $\tau_0 - \tau < t < \tau_0$  ، نجد ان فرق الطور يتخذ قيمة عشوائية  $\Delta$  ما بين  $0, 2\pi$  . ويكون هذا صحيحا لجميع الفترات الزمنية اللاحقة لفرق الطور ( كما في شكل 3.9).

وعليه ، يمكن اجراء التكامل في معادلة (3.24) كالتالي:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} e^{i[\phi(t)-\phi(t+\tau)]} dt &= \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0-\tau} dt + \frac{1}{\tau_0} \int_{\tau_0-\tau}^{\tau_0} e^{i\Delta} dt \\ &= \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0} + \frac{\tau}{\tau_0} e^{i\Delta} \end{aligned} \quad (3.25)$$

حيث  $\Delta$  تساوي قيمة فرق الطور العشوائية خلال الفترة الأخرى. وبما ان هذه القيمة عشوائية ، لذلك يكون معدل  $e^{i\Delta}$  مساويا للصفر ، بينما يكون المقدار  $\frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0}$  متساوي لجميع الفترات الزمنية ويساوي القيمة المتوسطة للتكامل.

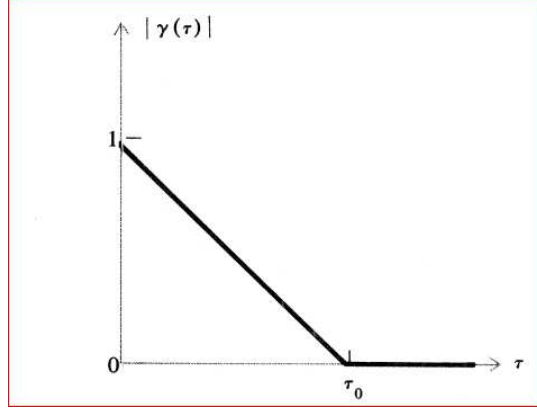
(3) اذا كان  $\tau > \tau_0$  ، وقيمة فرق الطور عشوائية ، فإن كل التكامل في معادلة (3.25) يؤول الى الصفر. في حالة التطاور المعابر الذاتي لمصدر شبه احادي اللون ، يكون

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) e^{i\omega\tau} & \tau < \tau_0 \\ &= 0 & \tau \geq \tau_0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

وكذلك ، يكون

$$\begin{aligned} |\gamma(\tau)| &= 1 - \frac{\tau}{\tau_0} & \tau < \tau_0 \\ &= 0 & \tau \geq \tau_0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

ويمكن تمثيل هذه المعادلات بيانيا كما في الشكل (3.10) .



شكل (3.10) منحنى التطاور لمصدر شبه احادي اللون.

ونلاحظ من هذا المنحنى ، ان في حالة تساوي السعات للشعاعين المتداخلين ، تكون  $|\gamma(\tau)|$  مساوية لدالة رؤية (وضوح) اهداب التداخل ، ويكون وضوح الأهداف يساوي الصفر عندما تزيد  $\tau$  عن زمن التطاور  $\tau_0$ .

اما فرق المسار *path difference* بين الشعاعين المتداخلين فيجب ان لا يزيد عن المقدار التالي:

$$c\tau_0 = I_c$$

حيث  $c$  هي سرعة الموجة الضوئية في الفراغ. ويسمى المقدار  $I_c$  طول التطاور *coherence length*.

فيزيائيا ، يمثل طول التطاور قطار الأمواج غير المتقطع *uninterrupted wave train* . في الحالة الفعلية لإشعاع الذرات ، تكون الفترة الزمنية بين تصادمات هذه الذرات غير ثابتة ، ولكن تتغير عشوائيا ما بين اي تصادم والذي يليه ، وعليه ، يتغير طول هذه القطارات الموجية بنمط عشوائي ، ولذلك ، نعرف زمن التطاور بدلالة معدل قيم الأزمان التطورية . وينطبق هذا على طول التطاور ، ايضا.

اما الشكل الرياضي لدرجة التطاور ودالة وضوح اهداب التداخل ، فيمكن التعبير عنه بشكل اكثر دقة بواسطة التوزيعات الاحصائية لأطوال قطارات الأمواج . على اية حال ، يمكن القول ان قيمة دالة رؤيا الأهداب تكون كبيرة عندما يكون فرق المسارت صغيرا بالنسبة لمعدل طول التطاور . وكذلك ، يكون العكس صحيحا .

### (3.6) التحليل الطيفي لقطار موجي محدود: التطاور واتساع خط الطيف

#### *Spectral Resolution of a Finite Wave Train: Coherence and Line Width*

عمليا ، لا يوجد مصدر ضوئي احادي اللون بشكل دقيق *Exact* ، حيث نجد ان هناك انتشارا (امتدادا) لتردد الخط الطيفي الذي يتمركز حول قيمة معدل التردد . في هذا البند ، ندرس العلاقة بين مدى اتساع او انتشار الخط الطيفي ( عرض الخط) مع درجة تطاور المصدر الضوئي ، اعتمادا على استخدام ما يعرف بنظرية تكامل فورييه *Fourier Integral Theorem* ، و تنص هذه النظرية على ما يلي:

يمكن التعبير عن اي دالة زمنية ،  $f(t)$  ، بدلالة تكامل على متغير جديد ،  $\omega$  ، بالصورة الرياضية التالية:

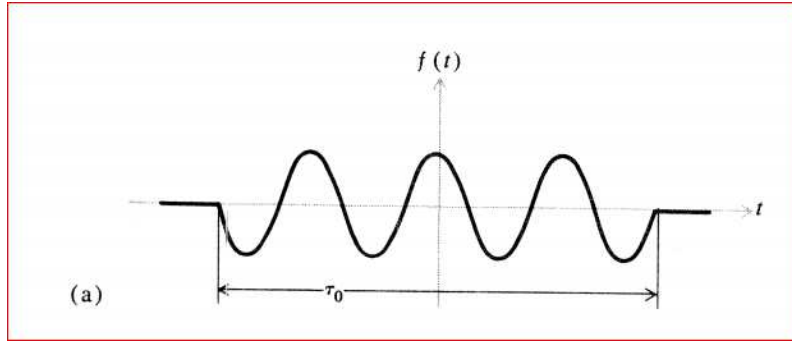
$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\
 g(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

حيث تعرف الدالتان ،  $\{f(t), g(\omega)\}$  بزواج تحويل فورييه *Fourier Transform pair* . حيث يمثل زوج المتغيرات  $(t, \omega)$  ، الزمن والتردد الزاوي على الترتيب . وتشكل الدالة  $g(\omega)$  التحويل الترددي للدالة الزمنية  $f(t)$  .

فيما يلي نتناول حالة خاصة ، حيث تكون الدالة الزمنية تمثل قطار موجي منفرد يدوم لزمن قدره  $\tau_0$  ، ولنفرض ان التغير الزمني لهذا القطار يعطى بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= e^{-i\omega t} \quad \text{for } -\frac{\tau_0}{2} < t < \frac{\tau_0}{2} \\
 f(t) &= 0 \quad \text{otherwise}
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

يمكن تمثيل الجزء الحقيقي لهذه الدالة بيانيا كما في الشكل (3.11a)



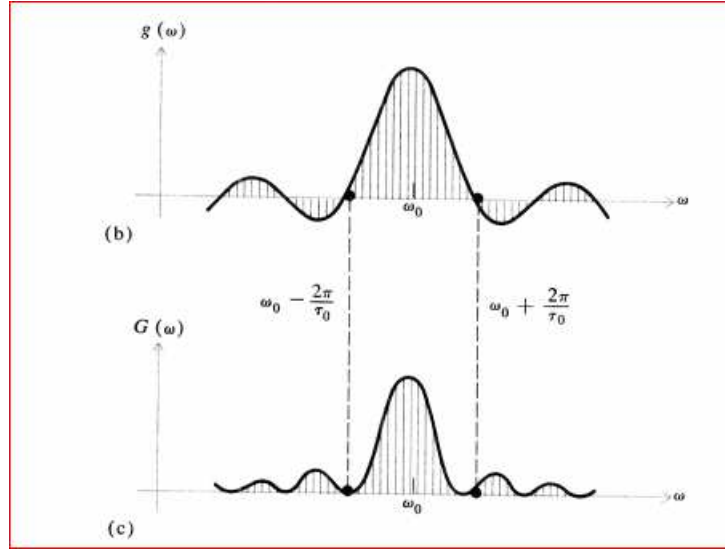
شكل (3.11a) : الجزء الحقيقي للدالة  $f(t)$

باستخدام تحويل فورييه ، نحصل على التالي:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau_0/2}^{+\tau_0/2} e^{i(\omega-\omega_0)t} dt$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin [(\omega - \omega_0)\tau_0/2]}{\omega - \omega_0} \quad (3.30)$$

بيانيا ، يمكن تمثيل دالة تحويل فورييه ،  $g(\omega)$  ، كدالة للتردد كما في الشكل (3.11b)



شكل (3.11b) منحنى دالة تحويل فورييه  $g(\omega)$  .

وتعرف دالة قدرة الطيف  $G(\omega)$  ، *power spectrum* ، بالعلاقة التالية

$$G(\omega) = |g(\omega)|^2$$

وتكون الصيغة الرياضية لهذه الدالة ، في حالة القطر الموجي المنفرد ، كما يلي:

$$G(\omega) = |g(\omega)|^2 = \frac{2 \sin^2 [(\omega - \omega_0)\tau_0/2]}{\pi(\omega - \omega_0)^2} \quad (3.31)$$

و يكون التمثيل البياني لدالة قدرة الطيف (معادلة 3.31) ، كما في الشكل (3.11c) . نلاحظ من هذا الشكل ، ان التوزيع الطيفي *spectral distribution* يكون اعظما عند  $\omega = \omega_0$  ، ويهبط تدريجيا الى الصفر عند التردد:  $\omega = \omega_0 \pm \frac{2\pi}{\tau_0}$  ، كما يوجد نهايات صغرى (او عظمى) ثانوية ، وتكون موزعة بالترتيب على جانبي النهاية العظمى المركزية . كما نلاحظ ان معظم الطاقة محصورة ما بين هاتين النهايتين الصغرتين الثانويتين . تسمى المسافة بينهما على خط التردد اتساع ( عرض ) خط الطيف . رياضيا ، يكون اتساع الخط هو

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau_0} \quad (3.32)$$

او

$$\Delta\nu = \frac{1}{\tau_0} \quad (3.33)$$

في حالة وجود قطارات موجية متلاحقة وكل منها يدوم لفترة زمنية  $\tau_0$  ، ولكن تتكرر عشوائيا . عندئذ ، يكون طيف القدرة هو نفس طيف قدرة النبضة المنفردة ، اما اذا كان دوام النبضات غير متساو ، فإن هذا التوزيع الطيفي يكون مختلفا عما عليه في حالة النبضة المنفردة . لذلك ، نتعامل مع معدل زمن فترة الدوام ( الإستمرارية ) ،  $\langle \tau_0 \rangle$  ، بدلا عن زمن فترة الدوام . وعليه ، يمكن القول ان عرض الخط الطيفي يقابل الكمية  $\langle \tau_0 \rangle^{-1}$  . كما يمكن اعطاء عرض الخط بدلالة زمن التطاور كالتالي:

$$\langle \tau_0 \rangle = \frac{1}{\Delta\nu} \quad (3.34)$$

اما طول التطاور *coherence length* يساوي طول المسافة التي يقطعها القطار الموجي في زمن الطور ، ويكون كما يلي:

$$l_c = c \langle \tau_0 \rangle = \frac{c}{\Delta\nu} \quad (3.35)$$

حيث  $c$  = سرعة الضوء ( النبضة الضوئية) . كما يمكن التعبير عن طول التطاور بدلالة طول الموجة  $\lambda$  ، باستخدام العلاقة التالية

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{|\Delta\lambda|}{\lambda}$$

اذن ، يكون طول التطاور كالتالي:

$$l_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \quad (3.36)$$

حيث  $\Delta\lambda$  = اتساع خط الطيف مقاسا بوحدة طول الموجة.

لتوضيح ذلك ، نعتبر حالة الطيف للأنايبب الغازية المفرغة ، حيث يكون عرض خط الطيف من رتبة الأنجستروم للضوء المرئي (  $\sim 5000\text{\AA}$  ) ، بينما يكون طول التطاور لهذه الحالة مساويا  $2\text{mm}$  . هذا يعني ان استخدام هذه المصادر الضوئية في تجارب التداخل يجعل وضوح رؤية الأهداب منخفضة اذا كان فرق المسارات الضوئية للأشعة المتداخلة اكبر من طول التطاور المذكور اعلاه .

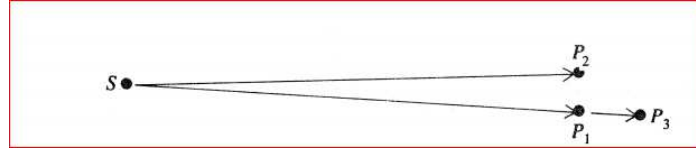
اما عند استخدام الضوء العادي ( الأبيض ) في تجارب التداخل ، وعند استخدام العين المجردة لتحري نمط التداخل ، تكون الحساسية الطيفية للعين ذات قيمة عظمى عند طول الموجة  $5500\text{\AA}$  ، وتصبح ذات قيمة صفرية ( تقريبا ) عند



اطوال الموجات  $7000A^0, 4000A^0$  ، كما يكون عرض خط الطيف  $= 1500 A^0$  ، وعليه ، ويكون طول التطاور يعادل 3 ال 4 طول موجي ( باستخدام معادلة 3.36 ) ، وهذا العدد يمثل عدد الأهداب التي يمكن رؤيتها على جانب الخط المركزي ( الصفري).

### (3.7) التطاور المكاني *Spatial Coherence*

في البند السابق ، درسنا مسألة التطاور بين مجالين ( موجتين ) يلتقيان عند نفس النقطة في الفضاء ولكن بمسارات ضوئية مختلفة . في هذا البند ، سندرس مسألة التطاور بين مجالين عندما يلتقيان في نقاط مختلفة في الفضاء . حيث يعتبر هذا الموضوع مهما لدراسة مسألة تطاور المجالات الإشعاعية الناتجة من مصادر ضوئية ممتدة *Extended sources* .  
نفرض وجود مصدر ضوئي نقطي ، شبه احادي اللون ، مثل  $S$  ( الشكل 3.12 ) ، ونفترض النقاط :  $P_1, P_2, P_3$  تقع في الفضاء وتستقبل المجالات الكهربائية التالية :  $E_1, E_2, E_3$  على الترتيب .



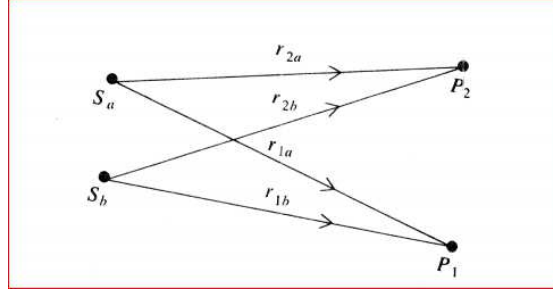
شكل (3.12) مخطط التطاور الجانبي والطولي لمصدر نقطي.

حيث ان النقطتين  $P_1, P_3$  تقعان على امتداد الشعاع المنطلق من المصدر ، ويكون بعداهما عنه مختلفا ، لذلك تستقبلان المجالات  $E_1, E_3$  بتطاور يسمى *التطاور المكاني الطولي* *Longitudinal spatial Coherence* .

بينما ، النقطتان  $P_1, P_2$  تقعان على نفس البعد عن المصدر ، لذلك تستقبلان المجالين  $E_1, E_2$  بتطاور يسمى *التطاور المكاني المستعرض* *transverse spatial coherence* . لنفرض ان البعد بين النقطتين  $P_1, P_3$  يساوي المسافة  $r_{13}$  ، يكون زمن التطاور الطولي للمصدر يساوي  $t_{13} = \frac{r_{13}}{c}$  ، وهذا يقابل زمن التطاور المصدر ( في البند السابق )  $\tau_0$  ، اي ، مهما كان المجال  $E_1(t)$  ، فإن المجال  $E_3(t)$  سوف يتغير مع الزمن بنفس الطريقة بعد الزمن  $t_{13}$  . كما يكون التطاور بين المجالين  $E_1, E_3$  مرتفعا اذا كان  $t_{13} \ll \tau_0$  ، بينما يكون هذا التطاور ضئيلا اذا كان  $t_{13} \gg \tau_0$  .

اما في حالة التطاور المستعرض ، اذا كان المصدر  $S$  مصدر نقطي حقيقي فإن الإعتدال الزمني للمجالين  $E_1, E_2$  يكون متساويا تماما ، وعليه يكون هذين المجالين في حالة *تطاور تبادلي تام* . بينما يكون التطاور جزئيا في حالة المصدر الممتد مكائيا *spatial coherence* .

فيما يلي ، نتناول دراسة طرق ايجاد التطاور المستعرض وعلاقته مع حجم المصدر الضوئي . يمكن اعتبار المصدر الممتد مكونا من عدة مصادر مستقلة ، وندرس المسألة باعتبار مصدرين فقط ومن ثم تعميم النتيجة لتشمل المصدر الممتد والمحدود . نفرض ان المصدران النقطيان :  $s_a, s_b$  ذات الأطوار المتغيرة عشوائيا وبشكل مستقل ( الشكل 3.13 ) ، او في حالة اللاتطاور التبادلي *mutually incoherence* .



شكل (3.13) مخطط هندسي لتطور مستعرض من مصدرين نقطيين

يمكن التعبير عن المجالين المستقبلين عند النقطتين  $P_1$  ،  $P_2$  والصادرين من كلا المصدرين كما يلي:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{1a} + E_{1b} \\ E_2 &= E_{2a} + E_{2b} \end{aligned}$$

حيث  $E_{1a}$  = مساهمة المصدر  $S_a$  في المجال عند النقطة  $P_1$  ، وهكذا.....

كما تكون دالة الإرتباط المعيارية عند النقاط المستقبلية للمجالات كالتالي

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(\tau) &= \frac{\langle E_1(t)E_2^*(t + \tau) \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} \\ &= \frac{\langle [E_{1a}(t) + E_{1b}(t)] [E_{2a}^*(t + \tau) + E_{2b}^*(t + \tau)] \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (3.37) \\ &= \frac{\langle E_{1a}(t)E_{2a}^*(t + \tau) \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} + \frac{\langle E_{1b}(t)E_{2b}^*(t + \tau) \rangle}{\sqrt{I_1 I_2}} \end{aligned}$$

مع ملاحظة انه في حالة اللاتطور بين هذين المصدرين ، تكون المقادير  $\langle E_{1a} E_{2b}^* \rangle$  ،  $\langle E_{1b} E_{2a}^* \rangle$  تساوي صفرا.

لنفرض ان الصورة الرياضية لكل من هذه المجالات تعطى بالمعادلة (3.22) المذكورة في البند (3.5) ، لذلك يمكن اجراء المعدلات الزمنية في معادلة (3.37) بنفس الطريقة المشروحة سابقا ، مع الأخذ بعين الإعتبار حساب الأزمنة اللازمة للمجالات لقطع المسافة بين المصدرين ونقاط الإستقبال . وعليه ، نجد ان

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{1}{2}\gamma(\tau_a) + \frac{1}{2}\gamma(\tau_b) \quad (3.38)$$

حيث ،

$$\gamma(\tau) = e^{i\omega\tau} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right)$$

وتكون دالة الارتباط الذاتية لكل من المصدرين كالتالي:

$$\tau_a = \frac{r_{2a} - r_{1a}}{c} + \tau$$

$$\tau_b = \frac{r_{2b} - r_{1b}}{c} + \tau$$

باستخدام العمليات الجبرية و الشرط :  $\tau_a - \tau_b \ll \tau_a, \tau_b$  ، نحصل على ما يلي

$$|\gamma_{12}(\tau)|^2 \approx \left(\frac{1 + \cos [\omega(\tau_b - \tau_a)]}{2}\right) \left(1 - \frac{\tau_a}{\tau_0}\right) \left(1 - \frac{\tau_b}{\tau_0}\right) \quad (3.39)$$

تدل معادلة (3.39) على التالي: يعتمد التطاور المتبادل بين المجالات عند النقاط المستقبلية على زمن التطاور الذاتي  $\tau_0$  ، وكذلك على الفرق بين تطاوري المصدرين :  $\tau_b - \tau_a$  ، ويكون هذا الإعتاد بطريقة دورية *periodic manner* من خلال حد جيب التمام في هذه المعادلة ، وعبارة اخرى ، يكون التطاور المتبادل بين نقطة ثابتة مع نقطة اخرى ، التي تكون مضاءة بمصدرين غير متطاوريين، تطاورا مكائيا ، مستعرضا ، ودوريا *periodic spatial transverse coherence*. لحساب طول هذا التطاور نتبع التالي

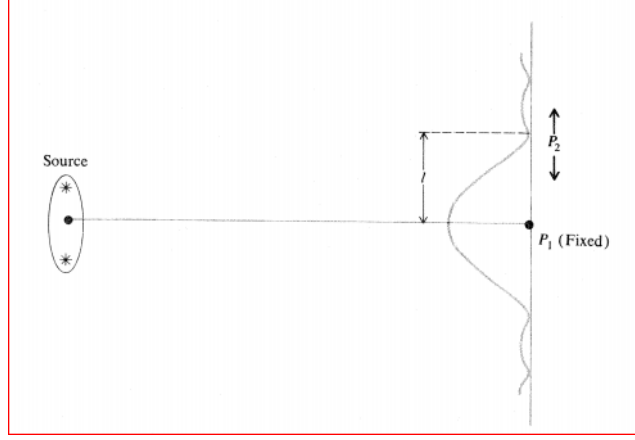
لنفرض ان النقطة  $P_1$  تكون في موضع متماثل بالنسبة بين المصدرين ( الشكل 3.13) ، وعليه ، يكون :

$$\tau_b - \tau_a = \frac{(r_{2b} - r_{1b})}{c} \quad , \quad r_{1a} = r_{1b}$$

$$\tau_b - \tau_a \approx \frac{sl}{2cr} \quad (3.40)$$

حيث ،  $s$  = البعد بين المصدرين ،  $l$  = البعد بين النقطتين المستقبلتين للمجالات ،  $r$  = معدل المسافة بين المصدرين وهذه النقاط . نلاحظ التشابه بين هذا الترتيب و الترتيب الهندسي لتجربة يونج في التداخل ( كما سبق شرحه ).

يوضح الشكل (3.14) منحنى التغير بين  $|\gamma_{12}|$  مع تغير المسافة بين النقطتين المستقبلتين ، ويلاحظ في الشكل مواقع الشدات العظمى والصغرى على شاشة الإستقبال للمجالات المتداخلة .



شكل (3.14) منحني التطاور الجانبي لمصدر ممتد.

كما نلاحظ من الشكل (3.14) ان التطاور الجانبي المتبادل يكون **اعظما** عندما تنطبق النقطة  $P_2$  على النقطة  $P_1$ ، كما يساوي الصفر على جانبي الخط المركزي عند المسافة  $l_t$ ، حيث  $\cos[\omega(\tau_b - \tau_a)] = -1$ ، او

$$\omega(\tau_b - \tau_a) = \frac{\omega s l_t}{2cr} = \pi \quad (3.41)$$

بما ان  $\omega = 2\pi c/\lambda$ ، نجد ان معادلة (3.41) تعطي التالي:

$$l_t = \frac{r\lambda}{s} \quad (3.42)$$

باستخدام التفريق الزاوي  $\theta_s$  *angular separation* بين المصدرين، عند الرصد من النقطة  $P_1$  التي تجعل  $\theta_s = s/r$ ، فإن معادلة (3.42) تؤول الى ما يلي

$$l_t = \frac{\lambda}{\theta_s} \quad (3.43)$$

فيزيائيا، تعطي معادلة (3.43) عرض منطقة التطاور المتبادل بين النقطتين ويسمى **عرض التطاور المستعرض**.

في حالة المصادر الممتدة مثل، سطح الشمس، والمصابيح الشمعية، يكون من الصعب ايجاد عرض التطاور المتبادل رياضيا. ولتسهيل عملية حساب هذا التطاور يمكن الإعتماد على نظرية تعرف باسم **نظرية زيرنايك Zernike**، وتنص هذه النظرية على التالي:

يمكن اعتبار درجة التطاور المركبة بين نقطة ثابتة،  $P_1$ ، ونقطة اخرى متغيرة،  $P_2$ ، الواقعتان في مستوى فضاء

حول المصدر الضوئي الممتد تساوي السعة المركبة عند  $P_2$  لموجة كروية مارة من خلال فتحة نفوذ مشابهة في الشكل والحجم للمصدر الممتد وتتقارب هذه الموجة نحو النقطة  $P_1$ .

باستخدام هذه النظرية، يصبح من الممكن استعمال تطبيقات نظرية حيود الأمواج *Diffraction Theorem* عند الفتحات الدائرية الضيقة ( كما سيرد شرحه في الفصول اللاحقة ). وعليه، يعطى عرض التطاور المستعرض، باستخدام دوال *Bessel function*، بالصورة الرياضية التالية:

$$l_t = \frac{1.22\lambda}{\theta_s} \quad (3.44)$$

مثال (3.2)

احسب طول التطاور المستعرض عند استخدام مصدر ضوئي ممتد على هيئة ثقب مستدير، قطره  $1.0 \text{ mm}$ ، ويعطي ضوء طول موجته  $600 \text{ nm}$ ، اذا كانت النقطتان تقعان على شاشة تبعد  $1 \text{ m}$  من المصدر؟

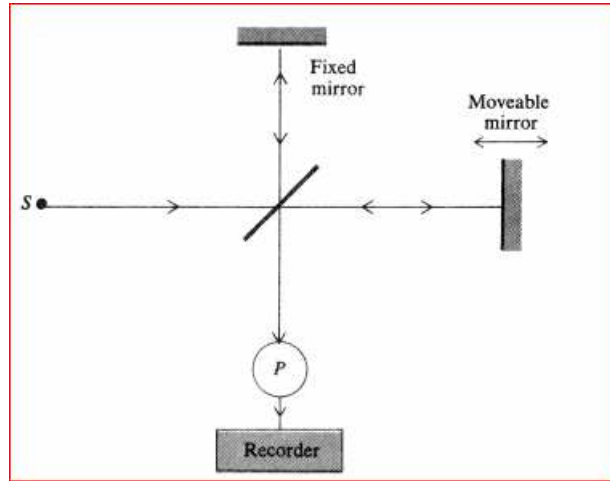
الحل

$$\theta_s = \frac{s}{r} = \frac{1 \text{ mm}}{10^3 \text{ mm}} = 10^{-3}$$

$$l_t = \frac{1.22 (600 \times 10^{-9}) \text{ m}}{10^{-3}} = 0.7 \times 10^{-3} \text{ m}$$

### (3.8) مطياف تحويل فورييه *Fourier Transform Spectroscopy*

عند اجراء تجربة ميكلسون، لنفوض ان الشعاع يتجزأ الى قسمين متطاورين وتعود هذه الأجزاء الى الإندماج مرة اخرى، ولكن بمسارات ضوئية (بسبب الإنعكاس عن المرايا كما في الشكل 3.18) مختلفة.



شكل (3.18) ترتيب مطياف تحويل فورييه.

إذا كان الشعاع المنبعث من المصدر ليس وحيد اللون ( أي يتكون من تراكب طيفي ويمثل بالدالة الرياضية  $G(\omega)$  ) ، عندئذ تكون الشدة المسجلة عند النقطة  $P$  متغيرة بطريقة تعتمد على هذا الطيف بشكل خاص. تكون هذه الشدة دالة لفرق المسار الضوئي بين الأشعة المتداخلة ، وبالتالي يمكن استنتاج طيف القدرة  $G(\omega)$ .

في هذه الحالة ، نمثل التوزيع الطيفي بدالة تعتمد على العدد الموجي  $k$  ، عوضاً عن تمثيلها بدلالة التردد الزاوي  $\omega$  ، حيث العلاقة بين هذين المتغيرين في الفراغ هي :  $\omega = ck$  ، ويرمز لهذه بالرمز  $G(k)$ .

بالرجوع الى معادلة (3.3) ، التي تعطي الشدة عند النقطة  $P$  للضوء احادي اللون، يمكن التعبير عن الشدة بدلالة التجميع على اجزاء الطيف الكلي ، كما يلي:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{\infty} (1 + \cos kx) G(k) dk \\ &= \int_0^{\infty} G(k) dk + \int_0^{\infty} G(k) \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} dk \\ &= \frac{1}{2}I(0) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(k)e^{ikx} dk \end{aligned}$$

او

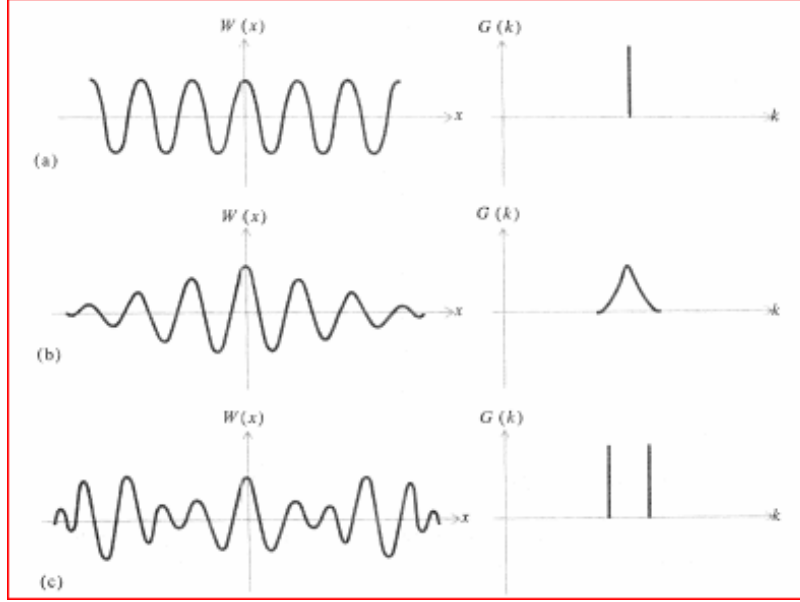
$$W(x) = 2I(x) - I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} G(k) dk \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (3.45)$$

حيث  $I(0) =$  الشدة عندما يكون فرق المسار بين الشعاعين صفراً،  $W(x)$ ،  $G(k)$  هما زوج تحويل فورييه . وعليه ، تكون الصورة الرياضية بينهما كالتالي:

$$G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} W(x)e^{-ikx} dx \quad (3.46)$$

أي ان قدرة الطيف  $G(k)$  هي تحويل فورييه للشدة  $W(x)$  .

من تطبيقات مطياف تحويل فورييه ، تحليل طيف الأمتصاص الغازي للأشعة تحت الحمراء *infrared absorption* ، خصوصاً عندما يكون هذا الطيف معقداً. اما الحساب الفعلي لدالة الشدة باستخدام تحويل فورييه فيتم اجرائه من خلال الواسيب عالية السرعة. ومن الأمثلة على بعض دوال الشدة واطيافها ، ما هو موضح في الشكل (3.19) .



شكل (3.19): (a) ضوء احادي اللون (b) خط طيفي عريض (c) خطان طيفيان ضيقان.

## تمارين

- (3.1) في تجربة تداخل الشق المزدوج ، اذا كانت المسافة بين حاجز الفتحات الى شاشة استقبال الأهداب هي  $2 \text{ mm}$  ، وطول موجة الضوء المستخدم  $600 \text{ nm}$  ، جد البعد بين الشقين اللازم لجعل تباعد الأهداب يساوي  $1 \text{ mm}$  .
- (3.2) في السؤال السابق ، اذا وضع لوح زجاجي سمكه  $0.05 \text{ mm}$  ومعامل انكسار مادته  $1.5$  ، امام احدى الفتحتين ، جد مقدار الإزاحة الجانبية للأهداب الناتجة عن ذلك ؟

(3.3) في تجربة ميكلسون ، اذا وضعت خلية شفافة بها غاز في طريق احد الشعاعين ، وكان طول الخلية  $l$  ومعامل انكسار الغاز  $n$  ، جد فرق المسار الضوئي للشعاع المار خلال الأنبوبة قبل وبعد ملؤها بالغاز ؟

(3.4) في السؤال السابق ، اثبت ان عدد الأهداب المارة خلال مجال الرؤية يساوي

$$N = 4l(n - 1)/\lambda$$

(3.5) اذا استخدم مرشح ضوئي *filter* للحصول على ضوء احادي اللون من اللون الأبيض ، وكان شريط المرور له  $10 \text{ nm}$  ، جد طول وزمن التطاير لهذا الضوء النافذ من المرشح ، علما ان طول موجته  $600 \text{ nm}$  ؟.

(3.6) جد عرض الخط الطيفي بوحدة  $\text{Hz}$  ، ووحدة  $\text{nm}$  ، لشعاع الليزر الذي طول تطايره  $5 \text{ km}$  ، وطول موجة الشعاع  $633 \text{ nm}$  ؟.

(3.7) اذا استخدم ثقب صغير قطره  $0.5mm$  كمصدر ضوئي في تجربة يونج ، حيث طول موجة الضوء النافذ من الثقب  $590\text{ nm}$  ، والمسافة بين المصدر والشق المزدوج  $0.5\text{ m}$ . جد المسافة بين الشقين حتى ينتج اهداب ممكن ملاحظتها ؟

(3.8) على فرض ان مصباح مكون من سلك تنجستون قطره  $0.1mm$  ، استخدم في تجربة تداخل ، جد البعد بين المصدر الضوئي والفتحة خلف هذا المصدر لكي يكون عرض التطاور المستعرض  $1mm$  على الأقل ؟ .

(3.9) جد قدرة الطيف لقطار موجي متخامد ويمثل بالدالة التالية :

$$\begin{aligned} f(t) &= A \exp(-at - i\omega_0 t), & t \geq 0 \\ f(t) &= 0, & t < 0 \end{aligned}$$

(3.10) برهن ان قدرة الطيف لنبضة جاوسية Gaussian pulse ، والمثلة بالدالة التالية:

$$f(t) = A \exp(-at^2 - i\omega_0 t)$$

يكون دالة جاوسية متمركزة حول التردد  $\omega_0$  ؟



## الفصل الرابع: تداخل الشعاع المتعدد

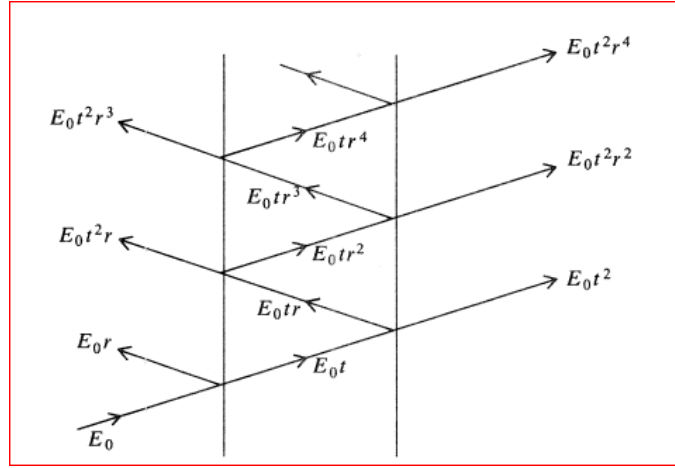
### Multiple –Beam Interference

نتناول في هذا الفصل دراسة التداخل بين الأشعة المتعددة ، وذلك باستخدام مقياس فابري- بيرو . كما نتناول القدرة التفريقية لهذا المقياس ، ونقدم دراسة لنظريات الأغشية ذات الطبقات المتعددة .

#### (4.1) تداخل الأشعة المتعددة *Interference with multiple beams*

في الفصل الثالث ، درسنا اساس التداخل بين شعاعين ضوئيين ، اما في هذا الفصل ، سندرس مبادئ التداخل بين الأشعة المتعددة ، حيث يعتبر تقسيم سعة الموجة من اهم الطرق لإنتاج العدد الكبير من الأشعة المتطورة تبادليا . ويتم هذا التقسيم بطريقة الإنعكاس المتعدد بين سطوح متوازية تملك خاصية الإنعكاس الجزئي . وقد تكون هذه السطوح عبارة عن مرآيا نصف منفذة *semitransmitted mirrors* ، غشاء رقيق ، او شريحة من مادة منفذة ( كما في الشكل 4.1).

لتسهيل دراسة النوضوع ، نعتبر السطوح العاكسة على شكل مرآتين متماثلتين، ونصف منفذة، حيث ينعكس الشعاع الأولي والساقط على السطح الأول جزئيا ، بينما يحدث للشعاع النافذ انعكاسا جزئيا على السطح الآخر ، ويتكرر ذلك على التتابع بين السطحين ( الشكل 4.1).



شكل (4.1) مسارات الشعاع في الإنعكاس المتكرر بين مرآتين متوازيتين.

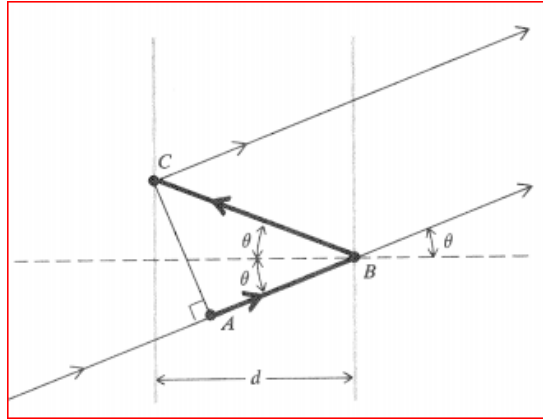
لنفرض ان  $E_0$  سعة الشعاع الأولي الساقط على السطح الأول ،  $r$  معامل انعكاس السطوح (متساوية لكل السطوح) ،  $t$  معامل النفاذ للسطوح . وعليه ، تكون سعة الأشعة المنعكسة داخليا بين السطحين ، كما يلي :

$$E_0 t, E_0 t r, E_0 t r^2, \dots \dots \dots$$

بينما تكون سعة الأشعة النافذة من السطح الثاني كما يلي:

$$E_0 t^2, E_0 t^2 r^2, E_0 t^2 r^4, \dots \dots$$

كما يكون فرق المسار الهندسي بين اي شعاعين نافذين ومتتاليين يساوي :  $2d \cos \theta$  ، حيث  $d$  المسافة (من الداخل) بين السطحين العاكسين ،  $\theta$  الزاوية بين اتجاه الشعاع المنعكس داخليا والعمودي على السطح العاكس (الشكل 4.2).



شكل (4.2) فرق المسار بين شعاعين نافذين ومتتابعين .

اذن ، يكون فرق الطور المقابل بين هذين الشعاعين النافذين كما يلي:

$$\delta = 2kd \cos \theta = \frac{4\pi}{\lambda} d \cos \theta \quad (4.1)$$

حيث  $\lambda$  طول موجة الشعاع في الوسط بين السطحين ، ويمكن بدلالة طول الموجة في الفراغ ،  $\lambda_0$  ، التعبير عن فرق الطور هذا كالتالي:

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} nd \cos \theta \quad (4.2)$$

حيث  $n$  معامل انكسار هذا الوسط .

لنفرض ان فرق الطور يمثل بصورة دالة أسية مركبة ،  $e^{i\delta}$  ، وبتجميع سعات كل الأشعة النافذة ، نحصل على السعة الكلية ، وتكون كما يلي:

$$E_T = E_0 t^2 + E_0 t^2 r^2 e^{i\delta} + E_0 t^2 r^4 e^{2i\delta} + \dots$$

ونلاحظ ان هذه المعادلة تشكل متتالية هندسية ، اساسها :  $r^2 e^{i\delta}$  ، ويكون مجموعها كالتالي:

$$E_T = \frac{E_0 t^2}{1 - r^2 e^{i\delta}}$$

بما ان شدة الشعاع تعطى بدلالة مربع السعة ، فإن شدة الشعاع النافذ الكلي هي:

$$I_T = I_0 \frac{|t|^4}{|1 - r^2 e^{i\delta}|^2} \quad (4.3)$$

حيث  $I_0 = |E_0|^2$  ، وهي شدة الشعاع الأولي الساقط على السطح الأول .

ايضا ، يحدث تغيرا في الطور بسبب الانعكاس ( كما سبق شرحه ) ، لذلك يكون معامل الانعكاس عدد مركب ، اي

$$r = |r| e^{i\delta_r/2} \quad (4.4)$$

حيث  $\frac{\delta_r}{2}$  يمثل التغير في الطور نتيجة انعكاس واحد فقط . لنفرض ان  $R =$  الإنعكاسية ،  $T =$  النفاذية فيمكن التعبير عن هذه الكميات بدلالة معامل الانعكاس ومعامل النفاذ كما يلي :

$$\begin{aligned} R &= |r|^2 = r r^* \\ T &= |t|^2 = t t^* \end{aligned} \quad (4.5)$$

وعليه ، تصبح معادلة (4.3) كالتالي

$$I_T = I_0 \frac{T^2}{|1 - R e^{i\Delta}|^2} \quad (4.6)$$

حيث  $\Delta =$  فرق الطور الكلي بين الأشعة المتتالية، ويساوي التالي

$$\Delta = \delta + \delta_r \quad (4.7)$$

لتبسيط معادلة (4.6) نتبع التالي:

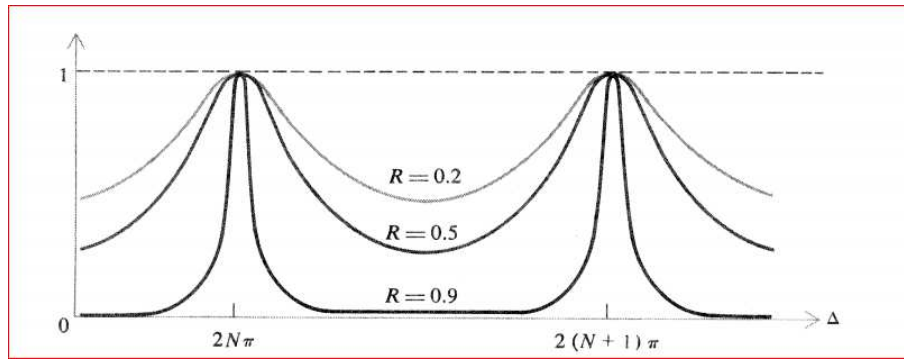
$$\begin{aligned} |1 - R e^{i\Delta}|^2 &= (1 - R e^{i\Delta})(1 - R e^{-i\Delta}) = 1 - R(e^{i\Delta} + e^{-i\Delta}) + R^2 \\ &= 1 - 2R \cos \Delta + R^2 = (1 - R)^2 \left[ 1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\Delta}{2} \right] \end{aligned}$$

وعليه ، تصبح الصورة الرياضية لمعادلة (4.6) كما يلي :

$$I_T = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\Delta}{2}} \quad (4.8)$$

يسمى الحد الأخير في معادلة (4.8) ،  $1/\{1 + F \sin^2 (\frac{\Delta}{2})\}$  ، دالة أيري *Airy function* ، وتسمى الكمية  $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$  معامل الدقة *finesse factor* ، حيث يدل مقدار هذا المعامل على مدى حدية اهداب التداخل

ويبين الشكل (4.3) السلوك العام لدالة أيري ، وذلك من خلال دراسة توزيع شدة الأهداب التداخلية للأشعة المتعددة كدالة لفرق التغير في الطور عند الحالات المختلفة من الإنعكاسية .



شكل (4.3) مخطط دالة أيري لقيم مختلفة من الإنعكاسية.

من هذا الشكل ، يمكن وصف الحالات التالية :

- (1) إذا كانت  $\Delta/2$  تساوي عدد صحيح من  $\pi$  ، فإن قيمة دالة أيري اعظمية لأي قيمة من قيم  $F$  . وإذا كانت قيمة  $R$  صغيرة جدا ، فإن قيمة  $F$  تكون صغيرة ، وعلية تكون الأهداب عريضة *Broad* ، وغير مميزة *indistinct* .
- (2) إذا كانت  $R \rightarrow 1$  ، فإن قيمة  $F$  تصبح كبيرة ، مما يجعل الأهداب حادة جدا *very sharp* .
- (3) الشرط اللازم للحصول على نهاية عظمى لشدة الهدب هو :  $\frac{\Delta}{2} = N\pi$  ، حيث  $N$  عدد صحيح .

وعليه ، باستخدام معادلتني (4.2،4.7) نجد ان:

$$2N\pi = \frac{4\pi}{\lambda_0} nd \cos \theta + \delta_r \quad (4.10)$$

يسمى العدد الصحيح  $N$  رتبة التداخل *order of interference* ، وهو يكافئ فرق المسار الضوئي بين شعاعين متعاقبين ، ويكون مقاسا بوحدة طول الموجة .

في المناقشات المذكورة سابقا ، إفترض ان السطوح العاكسة متماثلة ، اي ، معاملات انعكاسها متساوية. ولكن في الحالة العامة ، قد يكون لها معاملات انعكاسية مختلفة . ولدراسة هذه الحالة ، نفرض ان

$$r_2 = |r_2|e^{i\delta_2}, \quad r_1 = |r_1|e^{i\delta_1}$$

. كما يكون من السهل بيان ان العلاقات السابقة صحيحة ، اذا اعتبرنا

التالي:

$$\begin{aligned} T &= |t_1||t_2| = \sqrt{T_1 T_2} \\ R &= |r_1||r_2| = \sqrt{R_1 R_2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

، وكذلك ،

$$\delta_r = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \quad (4.12)$$

كما يمكن إيجاد القيم العظمى والصغرى للشدة  $I_T$  بجعل قيمة  $\Delta = 0$  او  $\pi$  على الترتيب . وعليه ، نجد ان النفاذية النسبية تساوي التالي

$$\mathcal{T}_{\max} = \frac{I_{T(\max)}}{I_0} = \frac{T^2}{(1 - R)^2} \quad (4.13)$$

$$\mathcal{T}_{\min} = \frac{I_{T(\min)}}{I_0} = \frac{T^2}{(1 + R)^2} \quad (4.14)$$

نفرض ان  $A$  نسبة الطاقة الممتصة من الطاقة الساقطة عند كل انعكاس . لذلك ، يعطي قانون حفظ الطاقة التالي

$$A + R + T = 1$$

في حالة عدم الإمتصاص بفعل الإنعكاس ، نجد ان  $R + T = 1$  . وفقا لمعادلة (4.13) ، هذه العلاقة تجعل  $\mathcal{T}_{\max} = 1$  ، مما يعني ان قمة الشدة العظمى *peak value* للأهداب النافذة والمتداخلة تتساوى مع شدة الضوء الساقط الأولي ، حتى ولو كانت  $R \rightarrow 1$  . عمليا ، لا تكون  $A \neq 0$  ، وعليه تكون النفاذية العظمى اقل من الواحد الصحيح ، اي ،

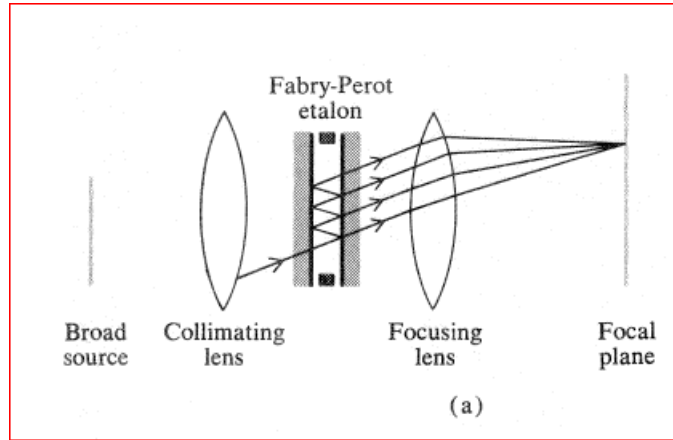
$$\mathcal{T}_{\max} = \left( \frac{1 - A - R}{1 - R} \right)^2 \quad (4.15)$$

## (4.2) مقياس تداخل فابري-بيرو Fabry – Perot Interferometer

في عام 1899 ، استخدم العالمان فابري – بيرو فكرة تداخل الشعاع المتعدد لتصميم مقياس تداخل عرف بإسميهما ، ويستخدم هذا المقياس لتحديد أطوال الأمواج بدقة عالية ولدراسة التركيب الدقيق لخطوط الطيف .

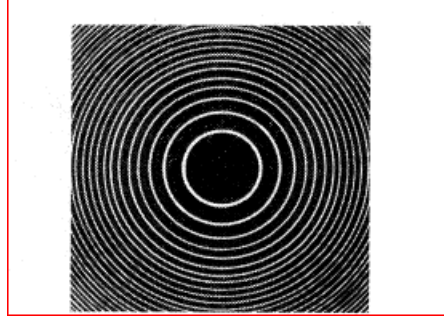
يتكون هذا المقياس من صفيحتين ( لوحيتين ) منبسطين بشكل تام ، مصنوعة من الزجاج او الكوارتز ، وتمتلك خاصية الإنعكاس الجزئي عند سقوط الضوء عليهما ، كما تكون سطوحهما العاكسة متوازية بشكل دقيق جدا . ويتم التحكم في تباعد اللوحين ميكانيكيا ، وهنا يسمى الجهاز بمقياس التداخل *Interferometer* ، بينما اذا كانت المسافة بين اللوحين ثابتة ، فإن الجهاز يعرف بإسم إيتالون **Etalon** ، وعادة يكون درجة استواء السطوح تتراوح ما بين  $\frac{1}{100} \leftarrow \frac{1}{20}$  من طول موجة ضوئية .

وعند استخدام هذا الجهاز كمقياس للتداخل ، يوضع بين عدستين لامتين ، العدسة الأولى الأمامية تجعل الأشعة الصادرة من المصدر الممتد اشعة متوازية وتسمى *Collimating Lens* ، بينما العدسة الثانية الخلفية تعمل على تجميع الأشعة النافذة من الجهاز في مستواها البؤري *focal plane* وتسمى بالعدسة المركزة *focusing lens* ( كما في الشكل 4.4 ) .



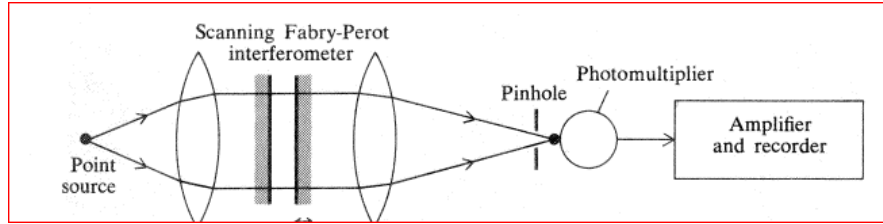
شكل (4.4) الترتيب الهندسي لمقياس فابري-بيرو مع مصدر عريض.

عند استخدام مصدر ضوئي عريض ( ممتد ) نحصل على نمط تداخل على شكل حلقات متمركزة دائرية في المستوى البؤري للعدسة الخلفية . ويمكن مشاهدة هذه الحلقات بالعين او بالتصوير الفوتوغرافي ( الشكل 4.5 ) .



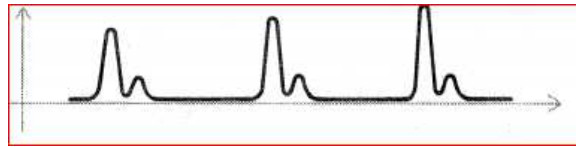
شكل (4.5) نمط التداخل في مقياس فابري-بيرو .

تقابل كل حلقة في نمط التداخل قيمة ثابتة للزاوية  $\theta$  ، وتسمى هذه الأهداب الدائرية بأهداب تساوي الميل *fringes of equal inclination* . وهناك عدة طرق لإستخدام مقياس فابري-بيرو ، من أهمها **طريقة المسح scanning method** ، حيث يستعمل مصدر نقطي أو ثقب ابري *pinhole* (الشكل 4.6) يوضع بحيث ان كل نقطة واحدة ( مركز الحلقة) تظهر على مستوى الخروج البؤري *exit focal plane* .



شكل (4.6) الترتيب الهندسي لإستخدام مقياس فابري - بيرو في مسح الأهداب.

وتتم عملية المسح بتغيير المسافة بين اللوحين ميكانيكيا او ضوئيا ، اي بتغيير ضغط الهواء ، وتسجل الشدة عند مركز الحلقة كهروضوئيا *photoelectrically* ، وهذا يعطي منحنى دالة الشدة في نمط التداخل . كما يمثل التسجيل البياني **مخطط دالة ابري** ،  $\left[ \frac{1}{1 + F \sin^2 \left( \frac{\Delta}{2} \right)} \right]$  ، او بالأحرى مجموع هذه الدوال لكل مكونات التردد ( الشكل 4.7) .



شكل (4.7) مخطط مخرج التسجيل عند استخدام المقياس كماش.

ويعرف **المدى الطيفي الحر free spectral range** بمقدار التباعد بين الرتب المتجاورة في اهداب التداخل . وبدلالة التغير في فرق المسار ،  $\Delta$  ، يكون هذا المدى مساويا للمقدار التالي

$$\Delta_{N+1} - \Delta_N = 2\pi$$

باستخدام المعدلات (4.2) ، (4.7) ، نجد ان

$$\omega_{N+1} - \omega_N = \frac{\pi c}{nd \cos \theta}$$

او

$$\nu_{N+1} - \nu_N = \frac{c}{2nd \cos \theta}$$

في حالة الزوايا الصغيرة ( $\cos \theta \rightarrow 1$ ) ، تكون القيمة التقريبية للمدى الطيفي الحر كالتالي:

$$\nu_{N+1} - \nu_N \cong \frac{c}{2nd} \quad (4.16)$$

### (4.3) تفريق جهاز فابري- بيرو Resolution of Fabry- Perot Instrument

لنفرض ان طيفاً ما مكوناً من خطين قريبين والتباعد الترددي بينهما  $\omega$  ،  $\omega'$  ، فإذا اريد دراسة تفريق ( تحليل ) هذا الطيف باستخدام مقياس تداخل فابري - بيرو ، نتبع الطرق الطرق الرياضية التالية:

حيث ان دالة الشدة لهذا الطيف هي عبارة عن تراكب نظامين من الأهداب ( كما في الشكل 4.8) ، ونفرض ان هذين الخطين لهما نفس الشدة ، وبذلك يعبر عن نمط التداخل بمجموع دالتي ايري كما يلي:

$$I_T = I_0 \left( 1 + F \sin^2 \frac{\Delta}{2} \right)^{-1} + I_0 \left( 1 + F \sin^2 \frac{\Delta'}{2} \right)^{-1} \quad (4.17)$$

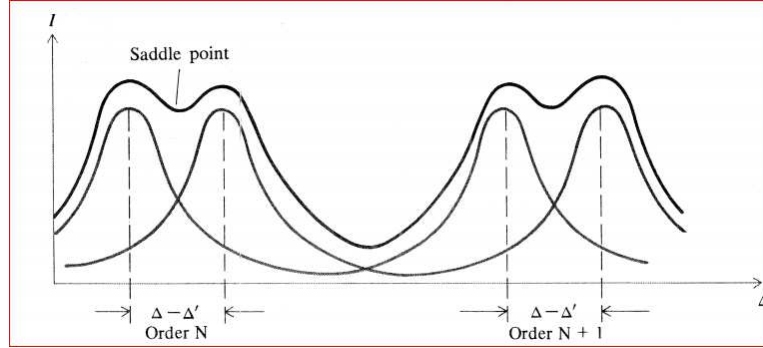
حيث تكون F معرفة بالمعادلة (4.9) . وعليه ، يكون فرق المسار التقريبي لقيم  $\theta$  الصغيرة ( $\cos \theta \rightarrow 1$ ) ، كما يلي

$$\Delta \approx \delta_r + 2kd = \delta_r + \frac{2\omega d}{c}$$

وكذلك ،



$$\Delta' \approx \delta_r + 2k'd = \delta_r + \frac{2\omega'd}{c}$$



شكل (4.8) منحنى توزيع الشدة كدالة لفرق المسار لخطي طيف احادي اللون ومنحنى الشدة المحصلة.

اي انه يمكن التفريق بين الخطين  $\omega, \omega'$  اذا كان هناك هوة (او قعر)  $dip$  في منحنى الشدة المحصلة عند نقطة ما ، وتعرف هذه النقطة **بنقطة الركاب** ( او سرج الخيل) *saddle point* ( لاحظ الشكل 4.8). وبعبارة اخرى ، يكون التفريق بين خطين متساويين في الطيف اذا كانت منحنيات الشدة لكل منهما تتقاطع معاً عند نقطة منتصف الشدة . وعليه ، تكون الشدة الكلية عند نقطة الركاب تساوي الشدة العظمى لكل خط. وعليه ، يمكن ان نعبر عن الشدة الكلية عند نقطة الركاب ( منتصف المسافة بين الترددين) كما يلي:

$$I = 2I_0 \left[ 1 + F \sin^2 \left( \frac{\Delta - \Delta'}{4} \right) \right]^{-1} = I_0$$

بحل هذه المعادلة ، نجد ان

$$F \sin^2 \left( \frac{\Delta - \Delta'}{4} \right) = 1$$

اذا كان المقدار  $(\Delta - \Delta')$  كمية صغيرة ، فيمكن استخدام تقريب الدرجة الأولى في مفكوك الجيوب ، اي  $\sin \theta \approx \theta$  ، وعليه ،

$$|\Delta - \Delta'| = 4F^{-1/2} = 2 \left( \frac{1-R}{\sqrt{R}} \right) \quad (4.18)$$

وبدلالة التردد الزاوي ، نجد ان

$$\delta\omega = |\omega - \omega'| = \frac{2c}{d} F^{-1/2} = \frac{c}{d} \left( \frac{1-R}{\sqrt{R}} \right) \quad (4.19)$$

تمثل معادلة (4.19) عرض ( اتساع ) الهدب عند منتصف الشدة والمكافئ لعرض التفريق لجهاز فابري – بيرو ذي التباعد بين اللوحين  $d$  والانعكاسية  $R$  .

تعرف النسبة بين مدى الطيف الحر الى عرض الهدب بمتغير يسمى النعومة ( الدقة ) الانعكاسية  $reflecting\ finesse$  ، وتعطى كما يلي:

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta_{N+1} - \Delta_N}{|\Delta - \Delta'|} = \frac{\pi}{2} \sqrt{F} = \pi \left( \frac{\sqrt{R}}{1-R} \right) \quad (4.20)$$

▪ قوة التفريق  $Resolving\ power$  :

تعرف قوة تفريق اي مقياس تداخلي (RP) بأنها مقلوب التفريق النسبي ، او

$$RP = \frac{\omega}{\delta\omega} = \frac{\nu}{\delta\nu} = \frac{\lambda}{|\delta\lambda|}$$

في هذه المعادلة ، يشير المقام الى قيمة التفريق الأصغر والتي تعادل عرض الهدب ، وعادة تقاس اما بدلالة التردد الزاوي او طول الموجة.

باستخدام معادلتني (4.19) ، (4.20) ، نجد ان قدرة تفريق جهاز فابري- بيرو تكون كما يلي:

$$RP = N\mathcal{F} = N\pi \left( \frac{\sqrt{R}}{1-R} \right) \quad (4.21)$$

من هذه المعادلة ، نستنتج ان قدرة التفريق للجهاز تزداد بزيادة رتبة التداخل  $N$  ، و يتم ذلك عن طريق زيادة التباعد بين اللوحين في الجهاز ، لأن :  $N = 2nd/\lambda_0$  .

مثال (4.1)

جد اقل مسافة بين خطي طيف ،  $500nm$  ، التي يمكن تفريقها بواسطة جهاز ايتالون ، حيث البعد بين اللوحين  $1mm$  ، اذا كانت الانعكاسية تساوي  $90\%$  ؟

الحل

في حالة الهواء والسقوط العمودي ، نجد ان

$$N = 2d/\lambda = \frac{(2)(0.01)}{5 \times 10^{-7}} = 40,000$$

باستخدام (4.21) ، نجد ان

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{N\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

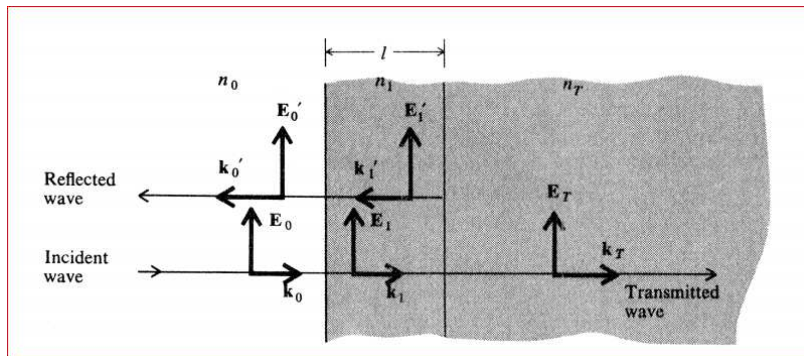
$$\delta\lambda = \frac{\lambda(1-R)}{N\pi\sqrt{R}} = \frac{(500 \times 10^{-9})(1.0-0.9)}{(40,000)\pi\sqrt{0.9}} = 0.0042$$

اما بخصوص تقنية مقياس تداخل فابري- بيرو ، يتم تصنيع الألواح من الفضة او من اغشية الألمنيوم المترسبة على سطح ما بالتبخر الفراغي ، وتكون مقدار انعكاسية هذا المقياس ما بين 90% - 80% ، وقد تصل قدرة التفريق للجهاز الى ما يعادل مليون مرة ، اي تعادل 100 مرة بالنسبة لقدرة تفريق المنشور او محزوز الحيود .

#### (4.4) نظرية الأغشية متعددة الطبقات Theory of multilayer Films

تستخدم اغشية متعددة الطبقات في البحث والصناعة لضبط مسارات الأشعة الضوئية والتحكم فيها . ويتم تصنيع السطوح البصرية التي لها اي مقدار للإنعكاسية او النفاذية معينين، باستخدام تقنية التغليف *coating* ، حيث يتم ترسيب اغشية رقيقة على الزجاج او المعادن عن طريق ما يعرف بالتبخير الفراغي *vacuum evaporation* . ومن استخدامات الأغشية الرقيقة : التغليف غير العاكس *antireflecting coating* ، والمرايا العاكسة للحرارة والمنفذة لها ، وهو ما يعرف المرآيا الساخنة *hot mirrors* ، والمرآيا الباردة *cold mirrors* ، والمرشحات الضوئية *optical filters* ، .....

لدراسة فيزياء هذه الأغشية ، نفرض طبقة واحدة من مادة عازلة، معامل انكسارها  $n_1$  ، وذات سمك  $l$  ، وبداية نتناول نظرية خاصة بالسقوط العمودي للضوء ، ومن ثم تعدل هذه النظرية لتشمل السقوط المائل بشكل عام ( كما الشكل 4.9).



شكل (4.9) متجهات الموجة والمجالات الكهربائية للسقوط العمودي على طبقة واحدة من الأغشية الرقيقة.

لنفرض ان :  $E_0, E_0', E_T$  متجهات المجال الكهربائي لسعة موجة الضوء الساقط ، المنعكس ، والنافذ على الترتيب . كما ان  $E_1, E_1'$  تمثل سعة المجال الكهربائي للموجة المنتقلة داخل الغشاء الى الأمام والخلف .

بتطبيق الشروط الحدودية على المجالات الكهربائية والمغناطيسية عند السطح الفاصل بين وسطين، وهي ان تكون مركبات هذه المجالات متصلة *continuous* عند هذا السطح ، لذلك ، نحصل على العلاقات المبينة في الجدول التالي :

First Interface	Second Interface
Electric: $E_0 + E'_0 = E_1 + E'_1$	$E_1 e^{ikl} + E'_1 e^{-ikl} = E_T$
Magnetic: $H_0 - H'_0 = H_1 - H'_1$	$H_1 e^{ikl} - H'_1 e^{-ikl} = H_T$
or $n_0 E_0 - n_0 E'_0 = n_1 E_1 - n_1 E'_1$	$n_1 E_1 e^{ikl} - n_1 E'_1 e^{-ikl} = n_T E_T$

ونلاحظ من هذا الجدول انه بسبب انتقال الموجة مسافة  $l$  بين السطح الأول والثاني ، تكون معاملات الطور للمجالات كما يلي :  $e^{ikl}$  ,  $e^{-ikl}$  .

بحذف  $E'_1, E_1$  من المعادلات المبينة في الجدول ، والتعويض بدل الدالة الأسية بالعلاقات المثلثية ،

$$e^{\pm ikl} = \cos\theta \pm i \sin\theta$$

نحصل على التالي :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{E'_0}{E_0} &= (\cos kl - i \frac{n_T}{n_1} \sin kl) \frac{E_T}{E_0} \\ n_0 - n_0 \frac{E'_0}{E_0} &= (-in_1 \sin kl + n_T \cos kl) \frac{E_T}{E_0} \end{aligned} \quad (4.22)$$

كما يمكن التعبير عن معادلة (4.22) بصورة مصفوفة كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ n_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -n_0 \end{bmatrix} \frac{E'_0}{E_0} = \begin{bmatrix} \cos kl & \frac{-i}{n_1} \sin kl \\ -in_1 \sin kl & \cos kl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ n_T \end{bmatrix} \frac{E_T}{E_0} \quad (4.23)$$

او

$$\begin{bmatrix} 1 \\ n_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -n_0 \end{bmatrix} r = M \begin{bmatrix} 1 \\ n_T \end{bmatrix} t \quad (4.24)$$

حيث معاملي الانعكاس والنفوذ هما

$$r = \frac{E'_0}{E_0} \quad (4.25)$$

$$t = \frac{E_T}{E_0} \quad (4.26)$$

وتسمى المصفوفة M بمصفوفة النقل *Transfer matrix*، وتكون على الصورة التالية:

$$M = \begin{bmatrix} \cos kl & -\frac{i}{n_1} \sin kl \\ -in_1 \sin kl & \cos kl \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$. k = 2\pi/\lambda = 2\pi n_1/\lambda_0 \quad \text{حيث}$$

في الحالة العامة ، نفرض وجود N طبقة من الأغشية الرقيقة ذات معاملات انكسار مختلفة ومعرفة بالمجموعة التالية:  $\{n_1, n_2, n_3 \dots n_N\}$  ، وذات سمك  $\{\ell_1, \ell_2, \dots \ell_N\}$  . بإنباع نفس طريقة اشتقاق معادلة (4.24) ، يمكن برهان ان معاملات الإنعكاس والنفوذ ترتبط معا بمعادلة المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ n_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -n_0 \end{bmatrix} r = M_1 M_2 M_3 \dots M_N \begin{bmatrix} 1 \\ n_T \end{bmatrix} t = M \begin{bmatrix} 1 \\ n_T \end{bmatrix} t \quad (4.28)$$

حيث  $M_1, M_2, \dots, M_N$  ، تمثل مصفوفات النقل لطبقات الأغشية والتي تحدد بالمعادلة (4.27).

لنفرض ان المصفوفة المحصلة الناتجة من حاصل ضرب مصفوفات الطبقات في الغشاء هي:

$$M_1 M_2 M_3 \dots M_N = M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

بحل معادلة (4.28) بالنسبة لمعامل الإنعكاس والنفوذ وبدلالة عناصر المصفوفة المحصلة ، نجد ان

$$r = \frac{An_0 + Bn_T n_0 - C - Dn_T}{An_0 + Bn_T n_0 + C + Dn_T} \quad (4.30)$$

$$t = \frac{2n_0}{An_0 + Bn_T n_0 + C + Dn_T} \quad (4.31)$$

وعليه ، نجد الإنعكاسية والنفاذية كما يلي:

$$R = |r|^2 , \quad T = |t|^2$$

## مثال (4.2)

جد اقل سمك لغشاء احادي الطبقة ، من مادة كبريتولاييت ( $n = 1.35$ ) ، عند استخدامه كمرشح ضوئي لعزل ضوء طول موجته  $\lambda = 594 \text{ nm}$  ؟

## الحل

باستخدام شرط القيمة العظمى للشعاع النافذ من الغشاء ، نجد ان

$$d = \frac{N\lambda}{2n \cos\beta}$$

حيث في حالة السقوط العمودي ،  $\beta = 0$  ، نجد ان

$$d = \frac{(1)(594)}{(2)(1.35)(1)} = 220 \text{ nm}$$

## مثال (4.3)

إذا تمت إمالة الغشاء في مثال (4.1) بزاوية  $10^0$  عن الوضع العمودي ، جد مقدار انزياح موقع الشدة العظمى لدالة النفاذية ؟

## الحل

نفرض ان زاوية سقوط الشعاع (من الهواء)  $\alpha$  ، وزاوية الإنكسار (في الغشاء ، حيث معامل انكساره  $n$ )  $\beta$  ،

باستخدام قانون سنل ، نجد ان

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} ، \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} \Rightarrow \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha / n^2}$$

باستخدام قانون القيمة العظمى للنفاذية لرتبة الهدب الأولى ( $N=1$ ) . في حالة السقوط العمودي ، نجد ان

$$2nd = \lambda_0 . \text{ لنفرض ان بعد إمالة الغشاء ، اصبح طول الموجة } \lambda' . \text{ وعليه ، يكون}$$

$$2nd \cos \beta = \lambda'$$

بالتعويض بدل قيم  $\lambda_0$  و  $\cos \beta$  ، نجد ان

$$\lambda' = \lambda_0 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha / n^2}$$

ثم بالتعويض ، نجد ان

$$\lambda' = 594 \sqrt{1 - \frac{\sin^2 10}{(1.35)^2}} = 589 \text{ nm}$$

اي ،

$$\Delta\lambda = 5 \text{ nm}$$

## Antireflecting Films ■ الأغشية غير العاكسة

تعطي معادلة (4.27) مصفوفة النقل لغشاء رقيق احادي الطبقة ، معامل انكساره  $n_1$  وسمكه  $\ell$  . لنفرض ان هذا الغشاء موضوعا على سطح زجاجي (  $n_T$  ) ، والوسط المحيط بهذا الترتيب هو الهواء . بالتعويض في معادلة (4.30) ، حيث  $n_0 = 1$  ، نجد ان

$$r = \frac{n_1(1 - n_T) \cos kl - i(n_T - n_1^2) \sin kl}{n_1(1 + n_T) \cos kl - i(n_T + n_1^2) \sin kl} \quad (4.32)$$

اذا كان السمك الضوئي للغشاء يعادل ربع طول موجي ، فإن  $k\ell = \pi/2$  . وعليه ، تكون الإنعكاسية لهذا الغشاء كالتالي:

$$R = |r|^2 = \frac{(n_T - n_1^2)^2}{(n_T + n_1^2)^2} \quad (4.33)$$

من هذه المعادلة (4.33) ، نجد ان الشرط اللازم لإنعدام الإنعكاسية (  $R=0$  ) ، هو

$$n_1 = \sqrt{n_T} \quad (4.34)$$

عادة ، يستعمل فلوريد المغنسيوم (  $n_1 = 1.35$  ) لتغليف السطوح الزجاجية للعدسات (  $n_T = 1.5$  ) . عند التعويض في معادلة (4.34) بهذه القيم ، نجد ان هذه المعادلة لا تكون صحيحة بشكل تام ، لكن مقدار الإنعكاسية ينخفض الى ربع قيمته في حالة الزجاج غير المغلف .

### مثال (4.4)

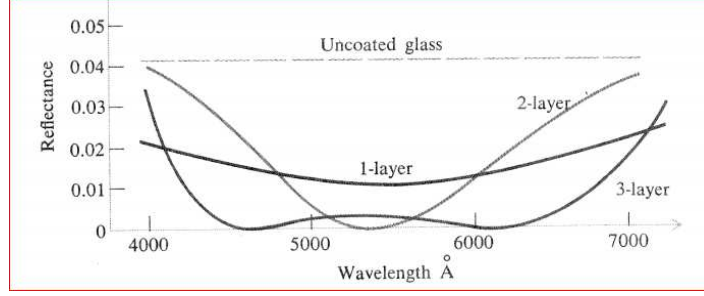
جد مقدار الإنعكاسية عند سقوط ضوء عموديا على السطح الفاصل بين الهواء والزجاج (  $n = 1.5$  ) ؟

**الحل :**

باستخدام معادلة (4.33) ، نجد ان

$$R = (1.5 - 1)^2 / (1.5 + 1)^2 = 0.04 = 4\%$$

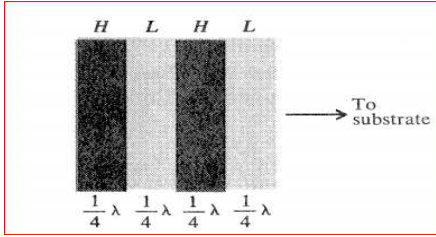
اما العلاقة البيانية للإنعكاسية كدالة لطول موجة الضوء الساقط على طبقة احادية او ثنائية من غشاء رقيق ، مقارنة مع السطح الزجاجي غير المغلف ، فهي كما يلي ( الشكل 4.10 )



شكل (4.10) منحنى الإنعكاسية كدالة لطول موجة الضوء الساقط.

### ■ الأغشية ذات الإنعكاسية العالية *High Reflectance Films*

للحصول على إنعكاسية عالية لغشاء رقيق متعدد الطبقات ، يمكن استخدام اشربة ( رزم ) *stack* من الطبقات ، بحيث تكون هذه الأشربة مرتبة على التناوب كما يلي: طبقة ذات معامل انكسار عالي *high index* ( $n_H$ ) تليها طبقة اخرى ، بنفس السمك ، ولكن بمعامل انكسار منخفض *low index* ( $n_L$ ) ، وهكذا ..... ، (الشكل 4.11)



شكل (4.11) ترتيب الأغشية ذات الإنعكاسية العالية.

حيث يكون سمك كل طبقة يساوي ربع طول موجة الشعاع الساقط . وتغلف هذه الأغشية السطح الزجاجي، وتكون مصفوفة النقل لجميع الأشربة متشابهة ، كما يكون ناتج ضرب مصفوف شريطين متجاورين كالتالي:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{-i}{n_L} \\ -in_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-i}{n_H} \\ -in_H & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-n_H}{n_L} & 0 \\ 0 & \frac{-n_L}{n_H} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

إذا كانت رزمة هذه الأشربة تتألف من  $2N$  من الطبقات ، فإن المصفوفة الكلية للغشاء المتعدد الطبقات تساوي:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{-n_H}{n_L} & 0 \\ 0 & \frac{-n_L}{n_H} \end{bmatrix}^N = \begin{bmatrix} \left(\frac{-n_H}{n_L}\right)^N & 0 \\ 0 & \left(\frac{-n_L}{n_H}\right)^N \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

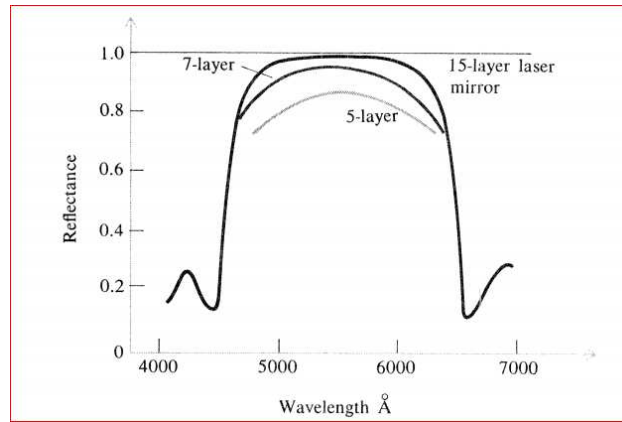
لتسهيل الدراسة ، نفرض ان الشعاع يسقط من الهواء ( $n_0$ ) ، وعليه ، باستخدام معادلة (4.30) ، نجد ان



$$R = |r|^2 = \left[ \frac{(-n_H/n_L)^N - (-n_L/n_H)^N}{(-n_H/n_L)^N + (-n_L/n_H)^N} \right]^2 = \left[ \frac{(n_H/n_L)^{2N} - 1}{(n_H/n_L)^{2N} + 1} \right]^2 \quad (4.37)$$

نلاحظ ان مقدار الإنعكاسية يقترب من الواحد كلما زاد عدد الطبقات ، فمثلا ، اذا كان عدد الطبقات 8 ، اي ،  $N=4$  ، وكانت المادة ذات معامل الإنكسار العالي هي كبريتيد الزنك ( $n_H= 2.3$ ) ، ومادة فلوريد المغنسيوم كمادة ذات معامل انكسار منخفض ( $n_L= 1.35$ ) ، فإن مقدار الإنعكاسية يساوي 0.97 ، وهذه القيمة اعلى من مقدارها في حالة تغليف الزجاج بمادة الفضة. وعند زيادة عدد الطبقات للغشاء الى 30 طبقة ، فإن قيمة الإنعكاسية تصل الى 0.999 .

بيانيا ، يمكن دراسة منحنيات الإنعكاسية كدالة لطول موجة الشعاع الساقط لعدة حالات من عدد الطبقات في الغشاء ، وتوضح النتيجة كما في الشكل (4.12).



شكل (4.12) منحنيات الإنعكاسية لغشاء متعدد الطبقات وعالي الإنعكاسية.

## تمارين

(4.1) اذا غلفت صفائح مقياس فابري- بيرو بالفضة بحيث كانت الإنعكاسية 0.9 ، النفاذية 0.05 ، والإمتصاصية 0.05 . جد القيمة العظمى والصغرى للنفاذية ، وكذلك معامل الدقة ؟.

(4.2) جد قدرة التفريق للجهاز المبين في (4.1) ، اذا كانت المسافة بين اللوحين  $1cm$  وطول موجة الشعاع  $500nm$  ؟

(4.3) اذا كانت المرآيا في صندوق رنين جهاز فابري- بيرو والمنتج لشعاع الليزر ، الذي طول موجته  $633nm$  ، ذات انعكاسية 0.94 ، والمسافة بينها  $1m$  ، جد عرض الأهداب بوحدة طول الموجة ؟

(4.4) برهن ان انصاف اقطار الأهداب في مقياس تداخل فابري- بيرو ( شكل 4.5a) تتناسب تقريبا مع الكميات التالية:  
 $\sqrt{0}, \sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{N'}$  ، حيث  $N'$  عدد صحيح ، وعلى فرضية وجود هذب برتبة صفرية . ( استخدم معادلة  
 (4.10) والتقريب في حالة قيم  $\theta$  الصغيرة ،  $\frac{\theta^2}{2}$  ،  $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$  ).

(4.5) اذا سقط شعاع ابيض بشكل متوازي وعموديا على صفيحة زجاجية ( معامل الإنكسار  $n$  ) ، سمكها  $d$  ، جد علاقة بين النفاذية وطول الموجة ، ثم بين ان النهاية العظمى تحدث عند طول الموجة  $\lambda_N = 2nd/N$  ، حيث  $\lambda_N$  طول موجة الشعاع في الفراغ ،  $N$  عدد صحيح .

(4.6) استخدم نتيجة (4.5) لإيجاد القيم العظمى والصغرى للنفاذية ، علما ان معاما انكسار مادة الصفائح 2.5 ، ثم اذا كانت المسافة بين الألواح  $Imm$  جد التباعد الموجي بين قناتين متجاورتين من الأهداب عند طول الموجة  $600 \text{ nm}$  ؟

(4.7) جد الإنعكاسية لغشاء ربع طول موجي وغير عاكس ، علما ان هذا الغشاء يتكون من مادة فلوريد المغنيسيوم ( $n=1.35$ ) ، والمترسبة على زجاج ( $n=1.52$ ) ؟

(4.8) جد القيمة الإنعكاسية لغشاء متعدد الطبقات والمكون من 8 طبقات ( 4 عالية المعامل الإنكساري ) ، حيث  $n_L = 1.4$  ،  $n_H = 2.8$  ؟

(4.9) بين بالتفصيل الرياضي ان مصفوفة النقل لغشاء احادي الطبقة هو:

$$M = \begin{bmatrix} \cos kl & -\frac{i}{n_1} \sin kl \\ -in_1 \sin kl & \cos kl \end{bmatrix}$$

(4.10) برهن ان في حالة السقوط المائل، تكون مصفوفة النقل لغشاء احادي الطبقة كالتالي:

$$M = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\frac{i}{p} \sin \beta \\ -ip \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

حيث :

$$p = n_1 \cos \theta \quad (TE \text{ polarization})$$

$$p = \frac{n_1}{\cos \theta} \quad (TM \text{ polarization})$$

حيث  $\theta =$  الزاوية المحصورة بين اتجاه الشعاع داخل الغشاء والعمودي على سطح هذا الغشاء.

## الفصل الخامس: الحيود *Diffraction*

نتناول في هذا الفصل دراسة ظاهرة حيود الموجات الضوئية ، ونقدم نموذجين للحيود: حيود فرينفوهر وحيود فرنيل ، مع شرح للنظريات الرياضية المتعلقة بكل نوع منهما . كما ندرس التطبيقات العملية لتلك الحيود ، ومنها تقنية التسجيل الضوئي الكامل ( الهلوجرام ).

### (5.1) مقدمة

عند وضع جسما معتما *obque* بين مصدر ضوئي وستارة ، يلاحظ وجود منطقة معتمة على هذه الستارة ، تسمى هذه المنطقة **بمنطقة الظل** ، ولا تكون هذه المنطقة المظلمة حادة *sharp* تماما وتسمى بمنطقة شبه الظل *shadow* . وعند فحص منطقة شبه الظل ، يلاحظ وجود اهداب مظلمة ذات شكل يعتمد على شكل الجسم المعتم في المنطقة المضاءة ، مما يدل على وصول الضوء الى الشاشة وامتداده الى خلف منطقة الظل . وتسمى هذه الظاهرة الضوئية بظاهرة **حيود الضوء** *Diffraction of light* .

كما تلاحظ ظاهرة الحيود عند مرور الضوء خلال الفتحات الضيقة ( كما في تجربة يونج ) ، او من خلال ثقب الإبرة *pinhole* . والتفسير الأولى لحدوث هذه الظاهرة يعزو ذلك الى انعراج الخطوط المستقيمة للشعاع الضوئي عن مسارها المستقيم ( الضوء الهندسي ) عند مرور هذا الشعاع خلال الشقوق الضيقة او حول حواف الجسم المعتم.

فيزيائيا ، تفسر ظاهرة حيود الضوء باستخدام مبدأ **هيجنز Huygen' Principle** ، وينص هذا المبدأ على التالي:

تتبعث الموجات الصادرة من المصدر الضوئي النقطي على هيئة سطوح كروية تسمى **مقدمة الموجة** ، ويكون مركزها المصدر الضوئي وتنتشر وفي جميع الإتجاهات المحيطة به ، ويكون اتجاه انتشارها بإتجاه الشعاع المنطلق من هذا المصدر وعموديا على هذه السطوح الكروية ، ويتم انتقالها في الوسط المحيط بالمصدر باعتبار ان كل نقطة على مقدمة الموجة تمثل مصدرا ثانويا للموجات *wavelets* ، بحيث ان السطح المغلف لهذه الموجات يشكل مقدمة الموجة الجديدة في اي لحظة اثناء الإنتشار .

نتناول في هذا الفصل معالجة ظاهرة الحيود الضوئية بالتطبيق المباشر لمبدأ هيجنز ، كما سنعتمد على قانون فيرنيل-كيرشوف *Fresnel – Kirrchoff formula* لإشتقاق قوانين الحيود في الحالات المختلفة : الشقوق الضيقة *narrow slits* والحواجز *obstacles* .

## (5.2) النظرية الأساسية *Fundamental Theory*

باستخدام نظرية جرين *Green Theory* والتي تنص على التالي:

إذا كانت  $U, V$  دالتين عدديتين *scalar functions* ، تحققان شروط الإستمرارية والتكاملية ، فإن

$$\iint (V \text{grad}_n U - U \text{grad}_n V) d\mathcal{A} = \iiint (V \nabla^2 U - U \nabla^2 V) d\mathcal{V} \quad (5.1)$$

حيث ، يكون التكامل السطحي ( الطرف الأيسر للمعادلة ) على سطح مغلق مثل  $\mathcal{A}$  ، بينما يكون التكامل الحجمي ( الطرف الأيمن) يشمل الحجم المغلف  $\mathcal{V}$  لهذا السطح . بينما " $\text{grad}_n$ " ، يعني المركبة العمودية لتحد (انحدار) هذا السطح .

وبشكل خاص ، إذا كان كل من هاتين الدالتين تحقق معادلة الموجة ، أي

$$\nabla^2 U = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \nabla^2 V = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

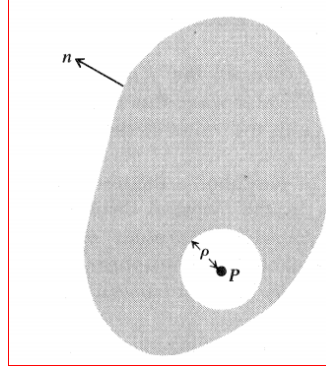
و الإعتدال الزمني للدالتين هو دالة توافقية ، أي  $e^{\pm i\omega t}$  ، عندها يكون التكامل الحجمي في معادلة (5.1) صفراً . وتحت هذه الشروط ، تؤول نظرية جرين الى التالي:

$$\iint (V \text{grad}_n U - U \text{grad}_n V) d\mathcal{A} = 0 \quad (5.2)$$

لنعبر ان الدالة  $V$  تمثل دالة الموجة ، لذلك تكون لها الصورة الرياضية التالية :

$$V = V_0 \frac{e^{i(kr+\omega t)}}{r} \quad (5.3)$$

وتمثل هذه الدالة موجة كروية تتقارب نحو النقطة  $P(r=0)$  ، حيث يشمل الحجم المغلف للسطح التكامل هذه النقطة ( الشكل 5.1) .



شكل (5.1) التكامل السطحي لبرهان نظرية تكامل كيرشوف.

وبما ان الحجم  $V$  يصبح غير محدد *infinite* عند النقطة  $P$  ، لذلك يجب استثناء هذه النقطة من التكامل ، ويتم عن طرح التكامل المساهم به من قبل كرة نصف قطرها  $\rho$  ومركزها النقطة  $P$  ( كما في الشكل 5.1 ) . على سطح هذه الكرة الصغيرة ، حيث  $r = \rho$  ، يكون  $\text{grad}_n = -\frac{\partial}{\partial r}$  . وعليه ، يمكن اعادة صياغة معادلة (5.2) واختزال العامل المشترك ،  $V_0 e^{i\omega t}$  ، من جميع الحدود ، نحصل على ما يلي:

$$\iint \left( \frac{e^{ikr}}{r} \text{grad}_n U - U \text{grad}_n \frac{e^{ikr}}{r} \right) d\mathcal{A} - \iint \left( \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - U \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} \right)_{r=\rho} \rho^2 d\Omega = 0 \quad (5.4)$$

حيث ،  $d\Omega =$  عنصر الزاوية المجسمة على الكرة التي مركزها عند  $P$  ، كما يكون  $\rho^2 d\Omega$  هو عنصر المساحة المقابل .

بجعل  $\rho$  تقترب من الصفر ( حالة انكماش الكرة ) ، عندئذ تصبح الكمية تحت التكامل في الحد الثاني من معادلة (5.4) يقترب من القيمة التي تجعل الدالة  $U$  تساوي الدالة  $U_p$  ( عند النقطة  $P$  ) ، وعليه يصبح التكامل الثاني في هذه المعادلة مقتربا من المقدار التالي

$$\iint U_p d\Omega = 4\pi U_p \quad (5.5)$$

وعليه ، تصبح معادلة (5.4) ، بعد ترتيب حدودها الجبرية ، كما يلي:

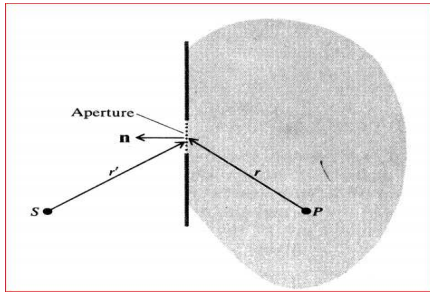
$$U_p = -\frac{1}{4\pi} \iint \left( U \text{grad}_n \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r} \text{grad}_n U \right) d\mathcal{A} \quad (5.6)$$

وتعرف معادلة (5.6) بنظرية تكامل كيرشوف ، ويربط هذا التكامل القيمة العددية لأي دالة موجية عددية عند نقطة ما بداخل سطح مغلق مع قيمة دالة الموجة على هذا السطح .

في تطبيقات نظرية كيرشوف للحيود ، تعرف دالة الموجة  $U$  بالإضطراب الضوئي *optical disturbance* ، وهي دالة عددية ، ويمثل مربع القيمة المطلقة لهذه الدالة ،  $|U|^2$  ، مقياساً للإشعاعية *irradiance* عند نقطة ما.

### ▪ قانون فيرنل - كيرشوف *Fresnel- Kirchoff formula*

نتناول تطبيق نظرية تكامل كيرشوف في الحيود الضوئي عند مرور الشعاع الضوئي خلال فتحات *apertures* ذات الشكل المطلق . نبدأ أولاً بإيجاد الإضطراب الضوئي عند نقطة ما مثل  $P$  بعد حيود الشعاع من الفتحة والقادم من المصدر  $S$  (كما في الشكل 5.2) .



شكل (5.2) الترتيب الهندسي لقانون فيرنل- كيرشوف

عند تطبيق نظرية تكامل كيرشوف ، نختار السطح التكاملية بحيث يحوي على النقطة  $P$  والفتحة ، ثم نستخدم الفرضين التاليين :

(1) تكون مساهمة دالة الموجة  $U$  وتحدرها (*gradient*) في التكامل بكميات مهملة ، بإستثناء الفتحة .

(2) تكون قيم  $U$  وتحدرها عند الفتحة تساوي نفس القيم كما لم يكن الحاجز موجوداً .

لنفرض ان  $r'$  تشير الى موقع النقطة في الفتحة بالنسبة للمصدر ، لذلك تكون دالة الموجة عند الفتحة كما يلي:

$$U = U_0 \frac{e^{i(kr' - \omega t)}}{r'} \quad (5.7)$$

وهذه تعبر عن امواج كروية احادية اللون والمنطلقة من المصدر نحو الفتحة . وعليه ، تكون نظرية تكامل كيرشوف كما يلي

$$U_p = \frac{U_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \iint \left( \frac{e^{ikr}}{r} \text{grad}_n \frac{e^{ikr'}}{r'} - \frac{e^{ikr'}}{r'} \text{grad}_n \frac{e^{ikr}}{r} \right) d\mathcal{A} \quad (5.8)$$

حيث ، يكون التكامل على جميع نقاط الفتحة .

يتم اجراء التكامل في معادلة (5.8) كما يلي:

$$\text{grad}_n \frac{e^{ikr}}{r} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \left( \frac{ike^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right) \quad (5.9)$$

وبالمثل ،

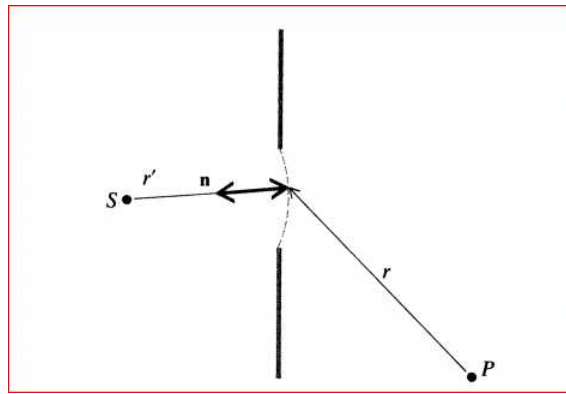
$$\text{grad}_n \frac{e^{ikr'}}{r'} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial r'} \frac{e^{ikr'}}{r'} = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') \left( \frac{ike^{ikr'}}{r'} - \frac{e^{ikr'}}{r'^2} \right) \quad (5.10)$$

حيث ،

$(\mathbf{n}, \mathbf{r}), (\mathbf{n}, \mathbf{r}')$  تحدد الزوايا بين المتجهات  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  والعمودي على السطح التكاملي . في معادلات (5.9،5.10) ، ويكون الحد الثاني في كل من الأقواس مهما ، لأن قيم المسافات  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$  تكون كبيرة بالنسبة لطول الموجة . وعليه ، تؤول معادلة (5.8) الى التالي

$$U_p = -\frac{ikU_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \iint \frac{e^{ik(r+r')}}{rr'} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}')] d\mathcal{A} \quad (5.11)$$

وهذه المعادلة تسمى قانون تكامل كيرشوف ، وهي تعبير رياضي عن مبدأ هيجنز ، كما سيبدو عند تطبيقه في حالة الفتحات الدائرية والمصادر الضوئية المتماثلة ( الشكل 5.3).



شكل (5.3) مخطط توضيحي لمبدأ هيجنز الناتج من قانون تكامل كيرشوف.

ولتوضيح ذلك ، نعتبر السطح التكامل على شكل طاقة كروية محدودة بالفتحة ، وتكون  $r' = \text{ثابتة}$  ،  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}')$  = 1 . وعليه ، يؤول قانون فيرنل-كيرشوف الى التالي:

$$U_p = -\frac{ik}{4\pi} \iint \frac{U_{\mathcal{A}} e^{i(kr-\omega t)}}{r} [\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + 1] d\mathcal{A} \quad (5.12)$$

حيث ،

$$U_{\mathcal{A}} = \frac{U_0 e^{ikr'}}{r'}$$

وتمثل هذه الدالة ،  $U_{\mathcal{A}}$  ، السعة المركبة للموجة الأولية والساقطة على الفتحة . من عنصر هذه الموجة الأولية ، تنتج الموجة الكروية الثانوية ذات السعة التالية

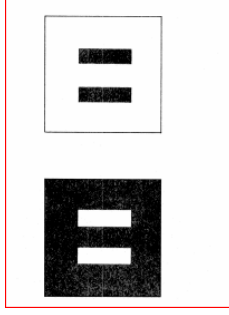
$$\frac{U_{\mathcal{A}} e^{i(kr-\omega t)}}{r} d\mathcal{A}$$

كما يكون الإضطراب الضوئي الكلي عند النقطة  $P$  يساوي مجموع كل سعات الموجات الثانوية الصادرة من كل عناصر الفتحة . لإيجاد هذا المجموع ، يجب الأخذ بعين الاعتبار المعامل التالي :  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}')$  ، ويسمى هذا المعامل **بمعامل الميلان obliquity factor** . عند اعتبار  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}') = -1$  يصبح عامل الميلان مساويا للمقدار  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{r}) + 1$  . وعليه ، في حالة انتشار الموجة في الإتجاه الأمامي *forward propagation* (اي نحو الفتحة) ، تكون قيمة هذا العامل تساوي 2 ، وهذا المقدار يمثل القيمة العظمى للمجموع . بينما في حالة الإنتشار الخلفي *backward propagation* ، يكون عامل الميلان صفرا ( القيمة الصغرى). وهذا يفسر عدم انتشار الموجات خلف الحاجز وفقا لمبدأ هيجنز.

#### ▪ الفتحات المتتامة - مبدأ بابينيت *Complementary Apertures- Babinet's Principle*

لنعتبر فتحة حيود ،  $\mathcal{A}$  ، تنتج اضطرابا ضوئيا عند نقطة ملاحظة مثل  $P$  ، ولنفرض ان هذه الفتحة قسمت الى قسمين :  $\mathcal{A}_1$  ،  $\mathcal{A}_2$  ، بحيث ،  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$  . في هذه الحالة ، نقول ان هذين القسمين من الفتحة متتامتان ، كما في الشكل (5.4).





شكل (5.4) الفتحات المتتامة .

بالرجوع الى قانون فريزل- كيرشوف ، نجد ان

$$U_p = U_{1p} + U_{2p} \quad (5.13)$$

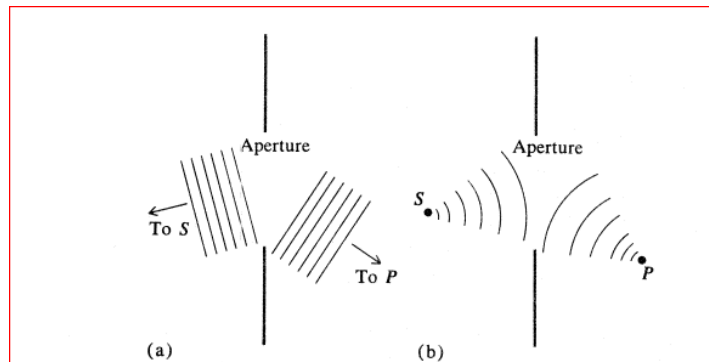
، حيث ،

$U_{1p} =$  الإضطراب الضوئي الناتج من الفتحة  $\mathcal{A}_1$  ، بينما  $U_{2p} =$  الإضطراب الضوئي الناتج من الفتحة  $\mathcal{A}_2$  ، وتعتبر معادلة (5.13) عن احدى الصيغ لنظرية تعرف بمبدأ باينيت ، وتبرز اهمية هذه النظرية في بعض الحالات ، مثلا ، اذا كانت :  $U_p = 0 \rightarrow U_{1p} = -U_{2p}$  . في هذه الحالة ، تعطي الفتحات المتتامة اضطرابا ضوئيا متماثلا ، عدا الإختلاف في الطور بمقدار  $180^\circ$  . وعليه ، تكون الشدة الضوئية ( مربع السعة) متساوية في المقدار . ومن نتائج هذه النظرية ، انه يحصل للضوء المتوازي حيودا متشنتا *scattered diffracted* عند مروره في وسط ضبابي يحوي على دقائق كروية صغيرة ، ويكون نمط الحيود مماثلا لنمط حيود الشعاع لدى مروره من خلال حاجز به عدة فتحات ذات الحجم المساوية لحجوم تلك الدقائق في ذلك الوسط الضبابي.

### (5.3) حيود فرنهوفر وحيود فريزل *Fraunhofer and Fresnel Diffraction*

عند دراسة ظاهرة حيود الضوء ، يلاحظ نوعان مميزان من انماط الحيود ، ويصنف هذان النوعان من الحيود الى : **حيود فرنهوفر وحيود فريزل** . حيث ، نحصل على حيود **فرنهوفر** عند مرور موجة مستوية من فتحة ضيقة ، وتكون مقدمة الموجة الحائدة ( خلف الفتحة ) موجة مستوية ، اي ، عندما يكون المصدر بعيد جدا عن الفتحة ( لاحظ الشكل (5.5a).

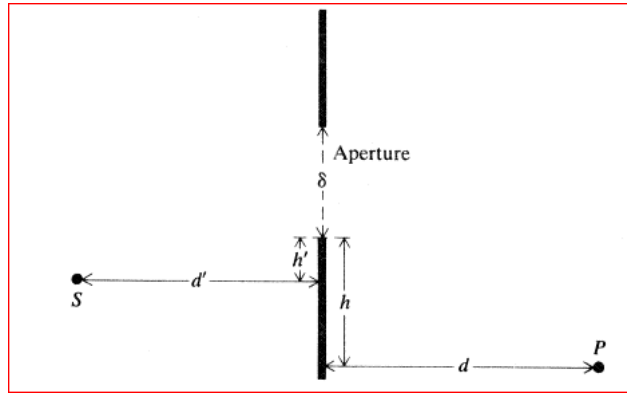
بينما اذا كان المصدر او نقطة الإستقبال على الشاشة قريبة من فتحة الحيود ، يكون لمقدمة الموجة الحائدة انحناء *curvature* ملموس ، ويسمى هذا النوع من الحيود **حيود فريزل** ( الشكل (5.5b) .



شكل (5.5) (a) حيود فرنهوفر (b) حيود فريزل .

عمليا ، لا يوجد خط فاصل تماما الذي يمكن بواسطته التمييز بين هذين النوعين من الحيود ، مع هذا يمكن الحصول على معيار معينة لشروط الحصول عليهما ، وهي كالتالي:

لنفرض ان النقطة المستقبلية للشعاع الحائد من فتحة ضيقة تبعد عموديا عن حاجز فتحة الحيود بمقدار  $d$  ، وبعد المصدر  $S$  عموديا عن هذا الحاجز يساوي  $d'$  ، ارتفاع احد اطراف الفتحة عن الخط الأفقي الواصل بين النقطة  $P$  والحاجز ، بينما  $h'$  ارتفاع طرف الفتحة عن الخط الأفقي الواصل بين المصدر والحاجز ( كما في الشكل 5.6).



شكل (5.6) مخطط هندسي لتمييز حيود فرنهوفر عن حيود فريزل .

إذا كان اتساع الفتحة يساوي  $\delta$  ، فإن التغير  $\Delta$  للكمية  $(r + r')$  ، ابتداءً من الطرف السفلي وحتى الطرف العلوي للفتحة ، يكون كالتالي:

$$\begin{aligned} \Delta &= \sqrt{d'^2 + (h' + \delta)^2} + \sqrt{d^2 + (h + \delta)^2} - \sqrt{d'^2 + h'^2} - \sqrt{d^2 + h^2} \\ &= \left(\frac{h'}{d'} + \frac{h}{d}\right) \delta + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d}\right) \delta^2 + \dots \end{aligned} \quad (5.14)$$

في معادلة (5.14) ، يعبر الحد التربيعي عن مقدار انحناء *curvature* مقدمة الموجة الحائدة . بينما عند الفتحة ، تكون هذه الموجة مستوية تقريبا إذا كان هذا المقدار صغيرا بالنسبة لطول الموجة . رياضيا ،

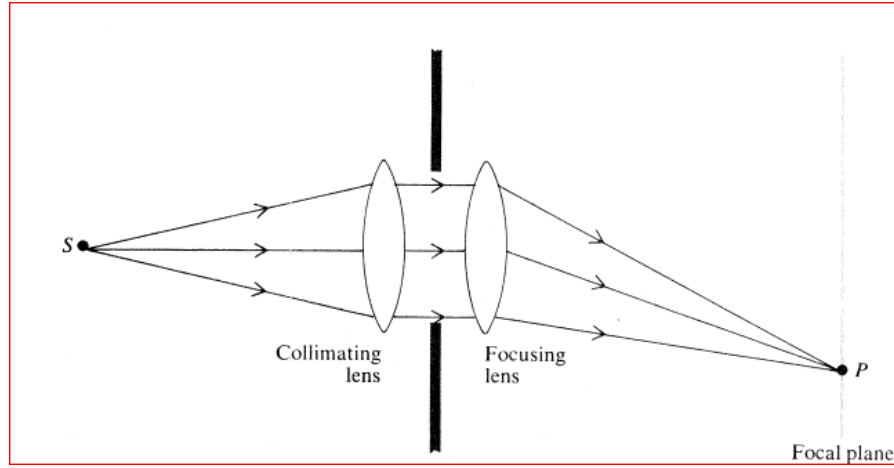
$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{d'} + \frac{1}{d}\right) \delta^2 \ll \lambda \quad (5.15)$$

ويعتبر هذا شرطا معياريا للحصول على حيود فرنهوفر . وان لم يتحقق هذا الشرط ، فإن انحناء مقدمة الموجة يكون معتبرا بحيث لا يمكن اهماله ، وبالتالي نحصل على حيود فريزل .

في البنود اللاحقة ، نعرض امثلة على هذين النوعين من الحيود الضوئي عند الفتحات الضيقة ذات اشكال هندسية مختلفة .

#### (5.4) حيود فرنفوفر *Fraunhofer Diffraction Patterns*

يبين الشكل (5.7) الترتيب الهندسي لمشاهدة حيود فرنفوفر . حيث يتم الحصول على مصدرا ضوئيا متطورا باستخدام عدسة لامة موضوعا في بؤرتها مصدر النقطي  $S$  . وعليه ، تكون الأشعة الخارجة من هذه العدسة متوازية وتتمر هذه الأشعة خلال فتحة الحيود . كما توضع عدسة لامة اخرى خلف الفتحة ، وذلك لتكيز الأشعة الحائدة على شاشة موضوعة في المستوى البؤري *focal plane* لهذه العدسة عند النقطة  $P$  . وعليه ، تكون مقدمة الموجة الساقطة والحائدة مستوية ، و بذلك يتحقق شرط حيود فرنفوفر .



شكل (5.7) الترتيب الهندسي لحيود فرنفوفر .

للمعالجة الرياضية لنمط حيود فرنفوفر ، نستخدم قانون فرينل-كيرشوف (معادلة (5.11) مع اعتبار التقريبات التالية :

(1) اعتبار الإنتشار الزاوي *angular spread* للأشعة صغير جدا لدرجة تجعل عامل الميلان متساو عند جميع اجزاء الفتحة . وعليه ، يمكن إخرجه من تحت اشارة التكامل في هذه المعادلة .

(2) ان يكون المقدار  $e^{ikr'}/r'$  ثابتا تقريبا ، وبالتالي يتم إخرجه من عملية التكامل .

(3) اعتبار التغير في المقدار  $e^{ikr}/r$  ناتجا عن الحد الأسي فقط ، وإعتبار العامل  $(1/r)$  يساوي متوسط القيم ، ويكون مقدارا ثابتا بحيث يتم إخرجه من عملية التكامل .

وبناء على هذه التقريبات ، نجد ان قانون فرينل-كيرشوف يؤول الى التالي:

$$U_p = C \iint e^{ikr} d\mathcal{A} \quad (5.16)$$

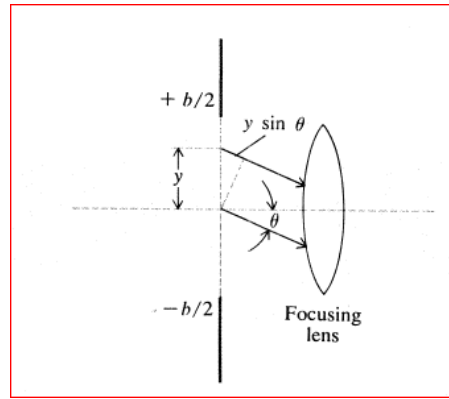
حيث ،  $C =$  ثابت ( حاصل ضرب جميع الثوابت في معادلة 5.11 ) .

وتعني معادلة (5.16) ، انه يمكن الحصول على توزيع الضوء الحائد بإجراء التكامل على دالة عامل الطور  $e^{ikr}$  لجميع نقاط الفتحة ( او اتساع الفتحة ) .

فيما يلي ، نعرض امثلة لتطبيق معادلة (5.16) لحالات مختلفة من فتحات الحيود .

### (a) الشق الضيق *the single slit*

نتناول حالة حيود فرنهوفر والنتيجة عن الشق الضيق ( مسألة البعد الأحادي *one dimensional problem* ) ، نفرض ان شفا ضيقا طوله  $L$  ( الشكل 5.8 ) ، وعرضه  $b$  ، ولنعتبر عنصرا من المساحة في الفتحة على شكل شريط ، حيث مساحته تساوي  $d\mathcal{A} = Ldy$  .



شكل (5.8) حيود فرنهوفر للشق الضيق.

وعليه ،

$$r = r_0 + y \sin \theta \quad (5.17)$$

حيث  $r_0$  تساوي  $r$  عند  $y=0$  . تسمى  $\theta$  بزواية حيود الشعاع عند الفتحة .

بالتعويض في معادلة (5.16) ، نحصل على ما يلي:

$$U = C e^{ikr_0} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{iky \sin \theta} L dy \quad (5.18)$$

$$= 2 C e^{ikr_0} L \frac{\sin (\frac{1}{2} kb \sin \theta)}{k \sin \theta} = C' \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)$$

حيث

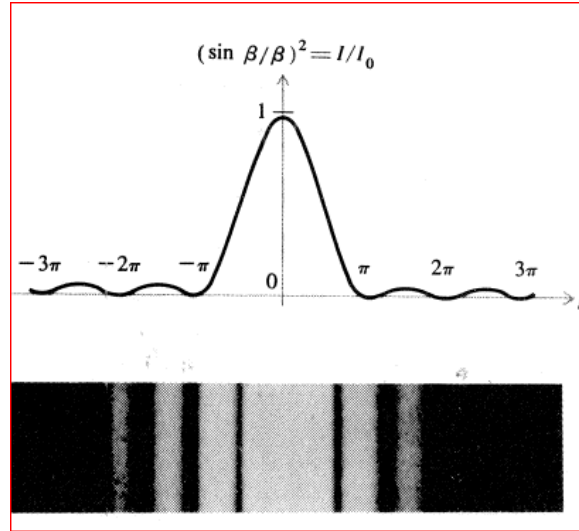
$$\beta = \left(\frac{1}{2}\right) k b \sin \theta ; C' = C b L e^{i k r_0}$$

كما يعبر المقدار  $C'(\sin \beta / \beta)$  عن السعة الكلية للشعاع الحائد في اتجاه محدد بالمتغير  $\beta$ . ويتم تركيز هذا الشعاع بواسطة العدسة الثانية، ويعطى توزيع الإنشعاعية كما يلي:

$$I = |U|^2 = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right)^2 \quad (5.19)$$

حيث  $I_0 = |CLb|^2$  ، وهذه الكمية تمثل الإنشعاعية عند  $\theta = 0$ .

بياناً، يمكن تمثيل توزيع الإنشعاعية النسبية كدالة للكمية  $\beta$  كما في الشكل (5.9).



شكل (5.9) نمط حيود فرنهوفر للشق الضيق .

من هذا الشكل نلاحظ ما يلي:

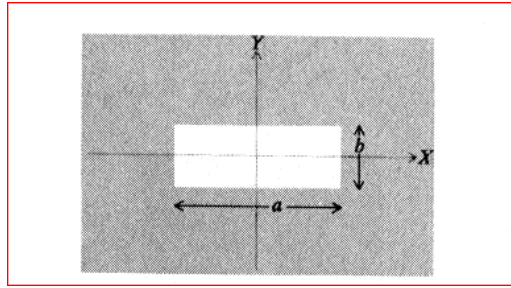
- (1) تكون القيمة الصفرية للشدة النسبية صفراً ، اذا كانت  $\beta = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$
  - (2) تتلاشى النهايات العظمى الثانوية بسرعة وتكون واقعة بين القيم الصفرية للشدة .
  - (3) يتألف نمط الحيود عند المستوى البؤري من شريط مركزي مضيء *central bright band* ، ويوجد على جانبيه اشربة مضيئة ومعتمة بالتناوب ( لاحظ الشكل 5.9).
- تحدث القيمة الصغرى الأولى للشدة عند  $\beta = \pi$  ، ويقابل ذلك زاوية حيود مقدارها :

$$\sin \theta = \frac{2\pi}{kb} = \frac{\lambda}{b} \quad (5.20)$$

هنا، تعبر زاوية  $\theta$  عن الإتساع الزاوي لنمط الحيود ، وتناسب طرديا مع طول موجة الشعاع الحائد ، وعكسيا مع عرض الفتحة .

### (b) الفتحة المستطيلة *The Rectangular Aperture*

لدراسة الحيود الناتج عن شق مستطيل ، يمكن استخدام نفس الخطوات السابقة في دراسة الشق الضيق الأحادي ، ولكن يكون التكامل في بعدين ، مثلا ،  $(x, y)$  ، كما هو مبين في الشكل (5.10) .



شكل (5.10) شق مستطيل.

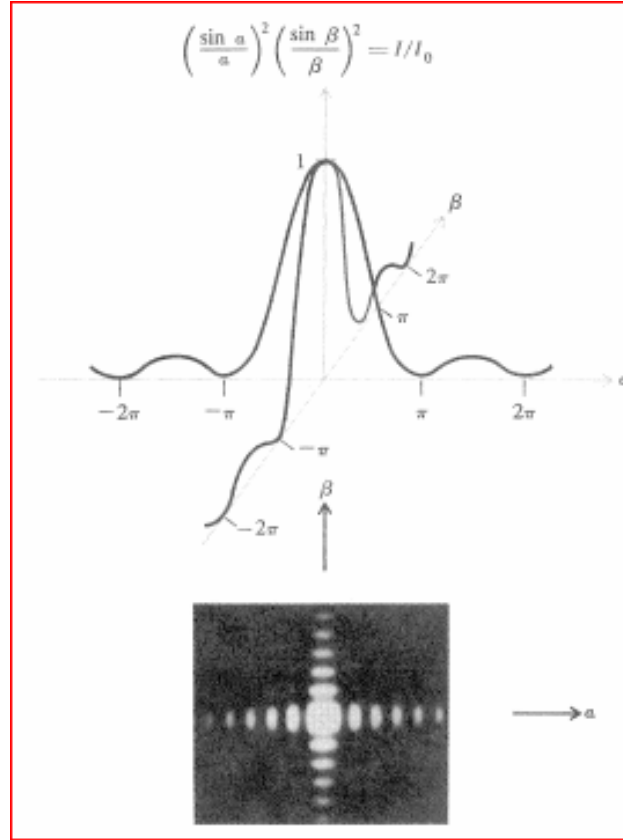
كما يمكن اثبات (يترك للطالب) ان توزيع الإنشعاعية يعطى كالتالي:

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad (5.21)$$

حيث

$$\alpha = \left( \frac{1}{2} \right) ka \sin \phi \quad ; \quad \beta = \left( \frac{1}{2} \right) kb \sin \theta$$

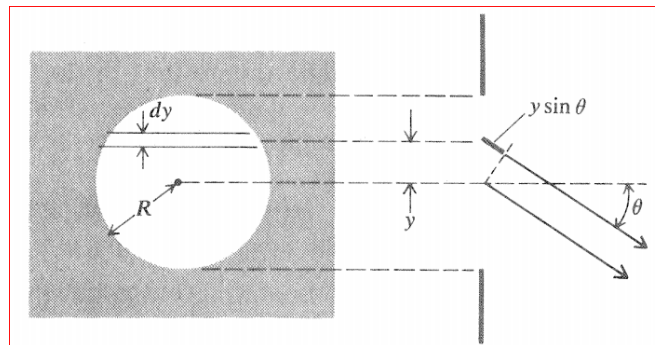
بينما تحدد الزوايا  $\theta, \phi$  إتجاهات الأشعة الحائدة ، كما يكون نمط الحيود للشق المستطيل كما في الشكل (5.11) ، حيث تكون خطوط الإنشعاعية الصفرية عند :  $\alpha = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$  ;  $\beta = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$  .



شكل (5.11) حيود فرنفور للشق المستطيل .

### (c) الفتحات الدائرية Circular Apertures

لدراسة نمط الحيود في الفتحات الدائرية ، نعلم على نفس المعالجة الرياضية للثق الضيق ، ونقسم الفتحة الى اشربة مستطيلة عرضها  $(dy)$  وطولها  $2\sqrt{R^2 - y^2}$  ، ( الشكل 5.12) ،



شكل (5.12) فتحة حيود دائرية .

وتكون سعة الموجة الحائدة ( الإضطراب الضوئي ) كما يلي

$$U = C e^{ikr_0} \int_{-R}^{+R} e^{iky \sin \theta} 2\sqrt{R^2 - y^2} dy \quad (5.22)$$

باستخدام المتغيرات التالية :  $\rho = kR \sin \theta$  ;  $u = y/R$  ، يصبح التكامل في معادلة (5.22) كما يلي

$$\int_{-1}^{+1} e^{i\rho u} \sqrt{1 - u^2} du \quad (5.23)$$

رياضيا ، يعتبر هذا التكامل معياريا *standard* ، وتكون قيمته تساوي  $\pi J_1(\rho)/\rho$  ، حيث  $J_1(\rho)$  تعرف بدالة **Bessel function** من النوع الأول ، وهناك جداول تعطي قيم هذه الدالة للمتغير  $\rho$  ، ومن خصائص هذه الدالة ما يلي :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{J_1(\rho)}{\rho} \rightarrow \frac{1}{2}$$

كما ان قيمة هذه الدالة تساوي الصفر عند عدة قيم معينة للمتغير  $\rho$  ، وتعرف هذه القيم بـ **Zeros** ، وهناك جداول رياضية تعطي قيم هذه الأصفار . فمثلا ، نجد ان قيمة الصفر الأول تساوي  $\rho = 3.832$  .

كما يكون توزيع الإنشعاعية كما يلي:

$$I = I_0 \left[ \frac{2J_1(\rho)}{\rho} \right]^2 \quad (5.24)$$

حيث

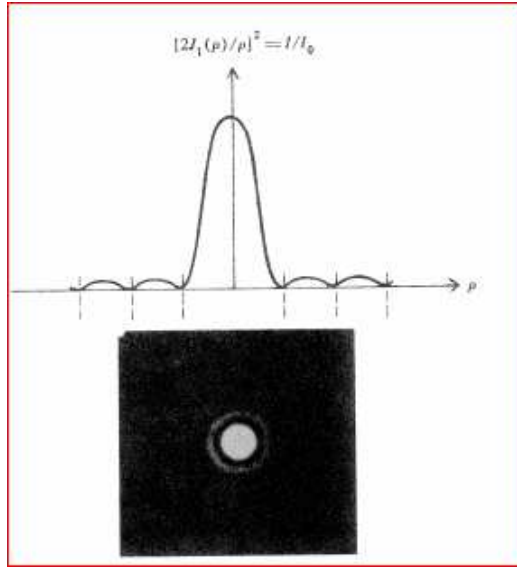
$$I_0 = (C\pi R^2)^2 \text{ ، ويساوي هذا المقدار الشدة عند } \theta = 0 .$$

كما يبين الشكل (5.13) منحنى توزيع الشدة النسبية في نمط الحيود للفحة الدائرية ، ويكون هذا النمط على شكل دوائر متماثلة ، وتسمى المنطقة المضيئة المركزية **قرص أيري** *Airy Disk* ، ويكون هذا القرص محاطا بحلقات دائرية متركزة وتتلاشى شدتها بسرعة كلما ابتعدنا عن المركز. كما يمتد القرص الى اول حلقة مظلمة ( اتساع القرص) بمقدار يعتمد على القيمة الصفرية لدالة بسيل ، ويكون نصف القطر الزاوي للحلقة المظلمة الأولى كما يلي

$$\sin \theta = \frac{3.832}{kR} = \frac{1.22\lambda}{D} \approx \theta \quad (5.25)$$



ويكون هذا التقريب صحيحا لقيم  $\theta$  الصغيرة . حيث  $D$  قطر فتحة الحيود وتساوي  $2R$  .



شكل (5.13) نمط الحيود في الفتحات الدائرية .

نلاحظ ان الإتساع الزاوي لقرص ايري، في حالة الفتحة الدائرية ، يكون اكبر من المقدار  $\lambda/b$  الذي يمثل الإتساع الزاوي للمنطقة المضيئة المركزية في نمط حيود الفتحة المستطيلة . في الجدول (5.1) ، نعرض مقارنة بين الشدة النسبية للقيم الأولى للنهايات العظمى الثانوية لنمط الحيود للشق المستطيل والفتحة الدائرية .

	<i>Rectangular</i>	<i>Circular</i>
Central Max	1	1
1st Max	0.0496	0.0174
2d Max	0.0168	0.0042
3rd Max	0.0083	0.0016

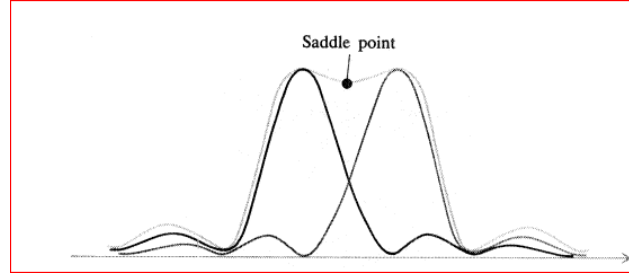
جدول (5.1) مقارنة الشدة النسبية للنهايات العظمى الثانوية

في نمط حيود الشق المستطيل والفتحة الدائرية .

#### التفريق الضوئي *Optical Resolution* ■

عملياً ، تتكون صورة الجسم النقطة البعيد بواسطة عدسة التلسكوب أو الكاميرا في المستوى البؤري لهذه الأدوات البصرية ، وهذه الصورة ما هي إلا عبارة عن نمط حيود فرنفور للأشعة خلال مرورها عبر فتحة نفوذ العدسة *Entrance Pupil* (وهي فتحة الحيود) ، حيث قطر العدسة يمثل اتساع هذه الفتحة . وبالمثل ، تكون صورة الجسم المركب من عدة نقاط عبارة عن تركيب عدد من اقراص أيري .

لنفرض ان قطر العدسة في الأداة البصرية يساوي  $D$  ، يكون نصف القطر الزاوي لقرص أيري مساوياً للمقدار  $1.22\lambda/D$  ، اعتبر ريلي **Rayleigh** ان هذا المقدار يمثل الشرط اللازم حتى يمكن للعين (أو الأداة البصرية) ان تفرق بين صورتين الجسمين القريبين . وعند تحقق هذا الشرط ، نجد ان موقع القيمة العظمى الرئيسية في نمط حيود الجسم الثاني تقع عند القيمة الصغرى الأولى في نمط حيود الجسم الأول (الشكل 5.14). اي ، يمكن التفريق بين صورتين جسمين اذا كان اقل تباعد بينهما يساوي المقدار السابق والذي يسمى **معياري ريلي** .

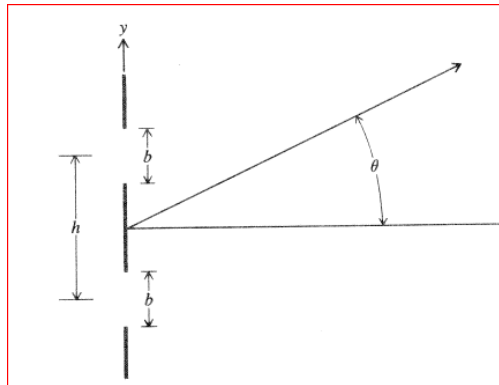


شكل (5.14) معيار ريلي .

بالتعويض في معادلة الشدة ، نجد ان الشدة الضوئية عند نقطة الركاب (الشكل 5.14) *saddle point* بالنسبة للشدة المركزية تساوي المقدار  $8/\pi^2 = 0.81$  .

#### (d) الشق المزدوج *The Double Slit*

لنعتبر ان فتحة حيود ما تتكون من شقين متوازيين ، اتساع كل منهما  $b$  والمسافة بينهما  $h$  ، (كما في الشكل 5.15).



شكل (5.15) فتحة الشق المزدوج .

لدراسة نمط الحيود في فتحة الشق المزدوج ، نتعامل رياضيا مع هذه الحالة كما في حالة حيود الشق الأحادي. اي ، يكون تكامل الحيود كالتالي:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky \sin \theta} dy &= \int_0^b e^{iky \sin \theta} dy + \int_h^{h+b} e^{iky \sin \theta} dy \\
 &= \frac{1}{ik \sin \theta} \left( e^{ikb \sin \theta} - 1 + e^{ik(h+b) \sin \theta} - e^{ikh \sin \theta} \right) \\
 &= \left( \frac{e^{ikb \sin \theta} - 1}{ik \sin \theta} \right) \left( 1 + e^{ikh \sin \theta} \right) \\
 &= 2b e^{ib} e^{i\gamma} \frac{\sin \beta}{\beta} \cos \gamma
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

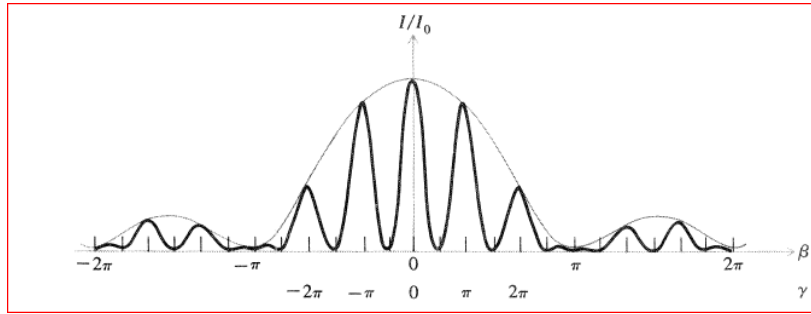
حيث

$$\beta = \frac{1}{2} kb \sin \theta ; \gamma = \frac{1}{2} kh \sin \theta$$

وعليه ، تكون الإنشعاعية كما يلي:

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \gamma \tag{5.27}$$

نلاحظ في معادلة (5.27) ان العامل  $(\sin \beta / \beta)^2$  يمثل دالة توزيع الشدة كما في حالة الشق الضيق ، بينما الحد  $\cos^2 \gamma$  يكون غلafa *envelope* لأهداب التداخل ، حيث يمثل هذا الغلاف المنحنى الذي يصل بين قمم النهايات العظمى الرئيسية والثانوية في نمط الحيود. يوضح الشكل (5.16) مخططا لتوزيع الشدة النسبية بدلالة  $\beta$  و  $\gamma$  .



شكل (5.16) نمط حيود فرنهوفر للشق المزدوج.

من الشكل (5.16) ، يمكن ملاحظة التالي:

(1) تكون مواقع الأهداب المضئبة ( القيم العظمى للشدة) عند  $\gamma = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$

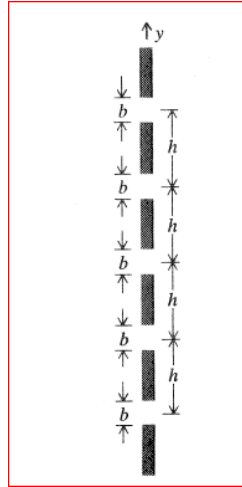
(2) يكون مقدار التباعد الزاوي بين الأهداب المضيئة يساوي  $\Delta\gamma = \pi$  ، كما يعبر عن هذا التباعد بدلالة  $\theta$  وذلك باستخدام العلاقة التقريبية ، في حالة الزوايا الصغيرة ،  $\sin\theta \approx \theta$  ، اي

$$\Delta\theta \approx \frac{2\pi}{kh} = \frac{\lambda}{h} \quad (5.28)$$

ومن الجدير بالملاحظة ان معادلة (5.28) تكافئ النتيجة التي تم الحصول عليها في تجربة يونج .

### (e) الشقوق المتعددة – محزوز الحيود *Multiple Slits - Diffraction Grating*

سنتناول دراسة حالة حيود الضوء خلال مروره من عدد  $N$  من الفتحات المنفذة ، حيث تكون هذه الفتحات متماثلة ومتوازية ، ويعرف هذا الترتيب من الفتحات **بمحزوز الحيود *Diffraction Grating*** . لنفرض ان اتساع الفتحة  $b$  ، والمسافة بين الفتحات  $h$  ( الشكل 5.17) .



شكل (5.17) محزوز الحيود .

لحساب سعة الموجة الحائدة من هذا المحزوز ، نستخدم الطرق الرياضية السابقة ، كما في حالة الشق المزدوج ، وتكون كما يلي:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{A}} e^{iky \sin \theta} dy &= \int_0^b + \int_h^{h+b} + \int_{2h}^{2h+b} + \dots + \int_{(N-1)h}^{(N-1)h+b} e^{iky \sin \theta} dy \\
&= \frac{e^{ikb \sin \theta} - 1}{ik \sin \theta} \left[ 1 + e^{ikh \sin \theta} + \dots + e^{ik(N-1)h \sin \theta} \right] \quad (5.29) \\
&= \frac{e^{ikb \sin \theta} - 1}{ik \sin \theta} \cdot \frac{1 - e^{ikNh \sin \theta}}{1 - e^{ikh \sin \theta}} \\
&= b e^{i\beta} e^{i(N-1)\gamma} \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right) \left( \frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma} \right)
\end{aligned}$$

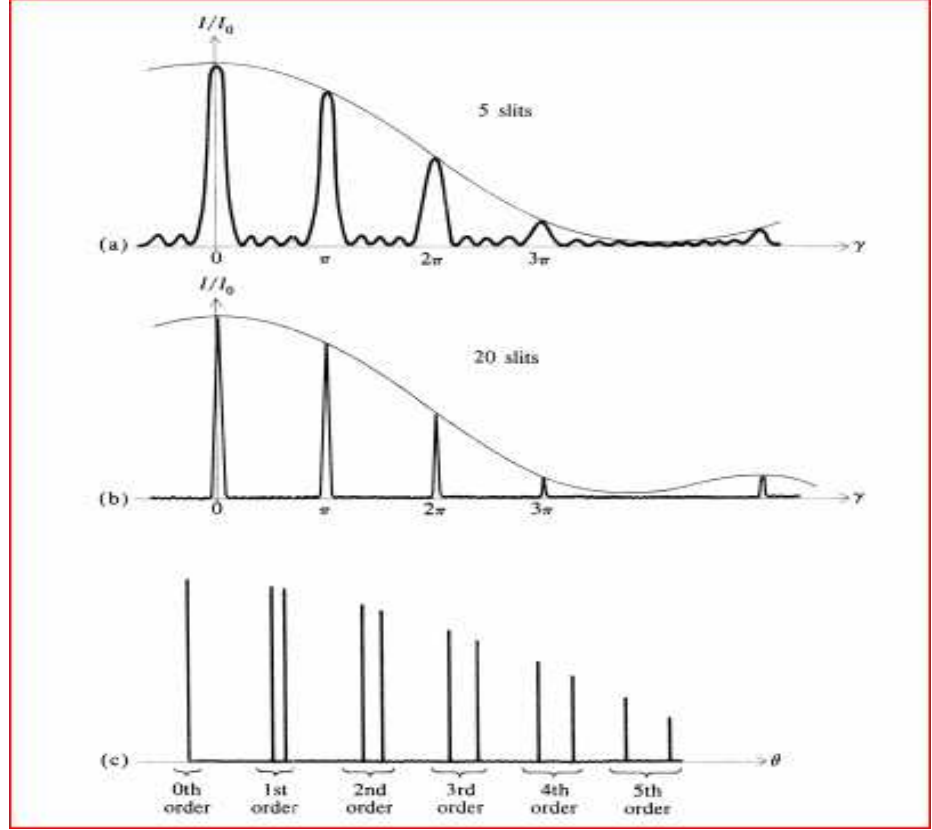
حيث

$$\beta = \frac{1}{2} kb \sin \theta ; \quad \gamma = \frac{1}{2} kh \sin \theta$$

تكون دالة توزيع الشدة الضوئية في نمط الحيود عند نقاط الشاشة المستقبلية للأشعة الحائدة من المحزوز كالتالي

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left( \frac{\sin N\gamma}{N \sin \gamma} \right)^2 \quad (5.30)$$

حيث ادخل العامل N في هذه المعادلة (5.30) ، وذلك لجعل هذا التعبير الرياضي معاير *Normalized* . وهذا يجعل  $I = I_0$  عند  $\theta = 0$  . ونلاحظ ان العامل:  $(\sin \beta / \beta)^2$  يشكل غلافا لنمط الحيود ( كما في حالة حيود الشق المزدوج).



شكل (5.18) نمط حيود فرنهوفر لضوء احادي اللون (a) عدد الفتحات 5 (b) عدد الفتحات 20 (c) نمط الحيود لضوء ثنائي اللون وعدد كبير جدا من الفتحات.

من هذا الشكل ، نلاحظ ما يلي:

(1) تكون مواقع النهايات العظمى الرئيسية لدالة الغلاف عند القيم التالية

$$\gamma = n\pi ; n = 0,1,2, \dots$$

اي،

$$n\lambda = h \sin \theta \quad (5.31)$$

يسمى العدد الصحيح الموجب  $n$  رتبة الحيود *diffraction order*.

(2) تكون مواقع النهايات العظمى الثانوية ، تقريبا ، عند القيم التالية:

$$\gamma = \frac{3\pi}{2N}, \frac{5\pi}{2N}, \dots$$

(3) تكون مواقع النهايات الصغرى *minima* عند القيم التالية :

$$\gamma = \frac{\pi}{N}, \frac{2\pi}{N}, \frac{3\pi}{N}, \dots$$

(4) اذا كانت  $\sin\beta/\beta \rightarrow 1$  ، يكون مقدار الشدة الضوئية للنهاية العظمى الأولى مساويا لمقدار الشدة المركزية ( $I_0$ ) .

### ▪ قدرة تفريق محزوز الحيود *Resolving Power of Diffraction Grating*

يمكن ايجاد الإتساع الزاوي للهدب المضيء الرئيسي ( التباعد بين موقع القيمة العظمى الرئيسية وموقع النهاية الصغرى المجاورة لها ) ، وذلك بجعل التغير في الكمية  $N\gamma$  مساوي  $\pi$  ، او

بالتعويض بدل قيمة ثابت الإنتشار ،  $k$  ، نجد ان هذه العلاقة تعطي ما يلي

$$\Delta\theta = \frac{\gamma\lambda}{Nh \cos \theta} \quad (5.32)$$

من هذه العلاقة (5.32) ، نلاحظ التناسب العكسي بين  $N$  و  $\Delta\theta$  . اي ، في حالة زيادة عدد الفتحات  $N$  الى مقدار كبير ، فإن نمط الحيود يظهر على شكل اهداب ( او خطوط) حادة ( كما في الشكل 5.18b,c ) والتي تقابل الرتب  $n=0,1,2,\dots$

ومن ناحية اخرى ، لأي رتبة حيود ، يمكن التعبير عن الإتساع الزاوي ،  $\Delta\theta$  ، بدلالة طول موجة الشعاع الضوئي وذلك بإشتقاق معادلة (5.31) ، حيث نجد ان

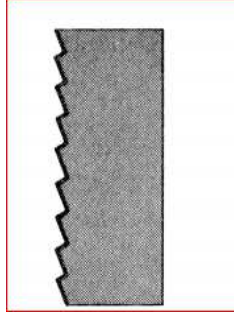
$$\Delta\theta = \frac{n \Delta\lambda}{h \cos \theta} \quad (5.33)$$

وتمثل هذه المعادلة (5.33) مقدار التباعد الزاوي بين خطي طيف مختلفين في طول موجتيهما بمقدار  $\Delta\lambda$  .

بدمج معادلتني (5.32) ، (5.33) ، معا ، نحصل على ما يعرف بقوة تفريق مطياف محزوز الحيود ( RP ) ، وتكون كما يلي:

$$RP = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nn \quad (5.34)$$

تقنياً ، يتم تصنيع محزوز الحيود بعمل أخاديد (*grooves* شقوق) على سطوح منفذة ، ويعرف هذا النوع بمحزوز المنفذ *transmission type* ، وهناك نوع آخر من المحزوزات تعرف بالمحزوز العاكس *reflection type* ، حيث يتم عمل الأخاديد على سطوح معدنية مستوية . ( كما في الشكل 5.19 )



شكل (5.19) محزوز حيود مستوي عاكس.

وتصنف المحزوزات بدلالة عدد الأخاديد لكل ملم ، فمثلاً إذا كان هناك محزوز حيود مكتوباً عليه  $600 \text{ line/mm}$  ، موزعة على منطقة اتساعها  $10 \text{ cm}$  ، يكون عدد الفتحات الكلية في هذا المحزوز  $N = 6 \times 10^4$  ، وتكون قوة التفريق في رتبة الحيود الثانية تساوي المقدار  $RP = Nn = 12 \times 10^4$  .

#### مثال (5.1)

إذا كان اتساع فتحة تلسكوب فلكي  $7.6 \text{ cm}$  ، وكان هذا التلسكوب مصوباً نحو هدف على بعد  $12.5 \text{ km}$  . على فرض أن طول موجة الضوء القادم إلى التلسكوب  $500 \text{ nm}$  ، جد التفريق الزاوي والخطي لهذا التلسكوب ؟ .

#### الحل

باستخدام معيار ريلي ، نجد أن التفريق الزاوي كالتالي

$$\theta_{min} \approx 1.22 \frac{\lambda}{D} = (1.22) \frac{500 \times 10^{-9}}{0.076} = (8 \times 10^{-6}) \text{ rad}$$

باستخدام العلاقة المثلثية التقريبية  $\tan \theta_{min} \approx \theta_{min} = \frac{d}{L}$  ، حيث  $d$  التفريق الخطي ،  $L$  بعد الهدف عن فتحة التلسكوب ، نجد أن

$$d = (12.5 \times 10^3)(8 \times 10^{-6}) = 10 \text{ cm}$$

#### مثال (5.2)

إذا كان اتساع فتحات محزوز حيود  $0.15 \text{ mm}$  والمسافة بين الفتحات المتجاورة تساوي  $0.6 \text{ mm}$  ، جد رتب النهايات العظمى المفقودة في نمط الحيود ؟ .



## الحل

نستخدم معادلة الحيود (5.31) ، التي تعطي مواقع النهايات العظمى الرئيسية ،

$$n\lambda = h \sin\theta$$

كذلك ، نستخدم المعادلة التي تعطي مواقع النهايات الصغرى للشق الأحادي (معادلة 5.20)

$$n'\lambda = b \sin\theta$$

حيث ،  $n'$  ، تمثل رتبة النهاية الصغرى في نمط حيود الشق الأحادي .

بقسمة هاتين المعادلتين ، نحصل على التالي

$$\frac{n}{n'} = \frac{h}{b} = \frac{0.6\text{mm}}{0.15\text{mm}} = 4$$

باعتبار الترتيب المتوالي لرتب القيم الصغرى في نمط حيود الشق الأحادي ، أي  $n' = 1,2,3 \dots$  ، تكون الرتب المفقودة للنهايات العظمى في حيود المحزوز كما يلي:

$$n = 4 n' = 4,8,12, \dots$$

## مثال (5.3)

عند استخدام محزوز حيود مكون من 400 خطا لتفريق خطي طيف ضوء الصوديوم ، حيث

$$\lambda_1 = 589 \text{ nm} , \lambda_2 = 589.6$$

(a) اقل رتبة في نمط الحيود التي يتمكن هذا المحزوز من تفريقها.

(b) مقدار اتساع هذا المحزوز

## الحل

(a)

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nn \Rightarrow n = \frac{\lambda}{N\Delta\lambda}$$

اذن ،

$$n = \frac{589 \times 10^{-9}}{(0.6 \times 10^{-9})(4 \times 10^2)} = 2.45$$

بما ان الرتب تكون اعدادا صحيحة ، لذلك تكون اقل رتبة تفريق بين خطي الصوديوم هي  $m=3$  .

(b) يكون اتساع (عرض) منطقة المحزوز غير مهما للحصول على هذا التفريق.

#### مثال (5.4)

يتكون محزوز حيود من 8000 خطا موزعة على منطقة عرضها  $4.0 \text{ cm}$  ، جد طول موجة الضوء الحائد من هذا المحزوز اذا كانت النهايات العظمى الخامسة الواقعة على جانبي النهاية العظمى المركزية تقابل زاوية  $90^\circ$  .

الحل

$$h \sin\theta = n\lambda \Rightarrow \lambda = h \left( \frac{\sin\theta}{n} \right)$$

بتعويض القيم المعطاة ، نجد ان

$$\lambda = \frac{0.04}{8000} \left( \frac{\sin 45}{5} \right) = 707 \text{ nm}$$

#### (5.5) انماط حيود فرينل Fresnel Diffraction Patterns

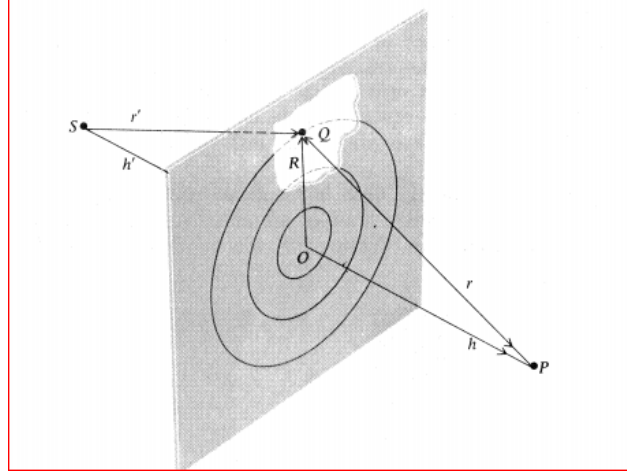
كما ذكر سابقا ، للحصول على حيود فرينل ، يجب ان يكون المصدر الضوئي او شاشة الإستقبال او كلاهما بالقرب من فتحة الحيود ، وفي هذه الحالات لا يمكن تجاهل انحناء مقدمة الموجة الحائدة خلال مرورها من هذه الفتحة.

رياضيا ، تكون المعالجة الرياضية لحيود فرينل اصعب منها في حالة حيود فرنهوفر ، ولكن عمليا ، يكون من السهل ملاحظة حيود فرينل في المعمل ، لأن الترتيب الهندسي يتكون فقط من : المصدر ، فتحة الحيود ، ثم شاشة استقبال نمط الحيود . كما نشاهد ظاهرة حيود فرينل حول منطقة الظل *shadow* عند مرور الأشعة الضوئية حول حدود جسم عائق ومعلم.

في هذا البند ، نعرض بعض حالات من نمط حيود فرينل والتي تتم دراستها بالطرق الرياضية الأولية.

#### ▪ مناطق فرينل Fresnel Zones

لنعتبر ان فتحة مستوية ، موضوعة امام مصدر نقطي ،  $S$  ، ( الشكل 5.20 ) ، بحيث يكون المستقيم الواصل بين  $S$  والنقطة المستقبلية  $P$  على الشاشة متعامدا مع مستوى الفتحة ، ويتقاطع معه عند النقطة  $O$  .



شكل (5.20) مناطق فرينل في الفتحة المستوية.

لنعتبر نقطة ما في الفتحة مثل  $Q$  ، بحيث يكون البعد بين  $O$  ،  $Q$  يساوي  $R$  . في الشكل (5.20) ، تكون المسافة  $PQS$  تساوي  $(r+r')$  . وبدلالة  $R$  ، يعبر عن هذه المسافة كما يلي :

$$r + r' = (h^2 + R^2)^{1/2} + (h'^2 + R^2)^{1/2}$$

حيث ،  $h$  ،  $h'$  تمثل المسافة  $OP$  ،  $OS$  على الترتيب .

لتبسيط هذه المعادلة في حالة  $R \ll h$  ،  $R \ll h'$  ، نخرج الكميات  $h$  ،  $h'$  من الأقواس ونستخدم مفكوك ذي الحدين لكل قوس ، ونعتبر الحدود الأولى فقط من هذا المفكوك ، حيث نحصل على التقريب التالي :

$$r + r' \approx h + h' + \frac{1}{2} R^2 \left( \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} \right) + \dots \quad (5.35)$$

بتقسيم الفتحة المستوية الى مناطق دائرية ومتحدة مركزيا ، بحيث تكون  $R =$  ثابت ، مع جعل التغير في قيم  $(r + r')$  بمقدار ثابت مساويا للمقدار  $\frac{\lambda}{2}$  خلال الانتقال من حد اي منطقة الى حد المنطقة المجاورة لها. عندئذ ، تسمى هذه المناطق بإسم مناطق فرينل *fresnel zones* ( الشكل 5.20) . لنفرض ان :

$$L = \left( \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} \right)^{-1} \quad (5.36)$$

باستخدام معادلة (5.35) ، نجد ان التغير في قيم  $(r + r')$  في اي منطقة من مناطق فرينل ،  $\Delta$  ، بدلالة  $L$  يكون كما يلي :

$$\Delta = \frac{1}{2} R_n^2 L = n \frac{\lambda}{2}$$

حيث  $n =$  رتبة المنطقة . وعليه ، كما تكون انصاف الأقطار المتتالية لهذه المناطق كالتالي

$$R_1 = \sqrt{\lambda L}, R_2 = \sqrt{2\lambda L}, \dots R_n = \sqrt{n\lambda L}$$

حيث ،  $h'$  ،  $h$  تمثل المسافة  $OS$  ،  $OP$  على الترتيب . كما تكون مساحات مناطق فرينل متساوية تقريبا ولا تعتمد على رتبة المنطقة . ولبرهان ذلك ، نعتبر مساحة المنطقة ذات الرتبة  $m$  ،  $A_m$  ، والتي تعطى كالتالي:

$$A_m = \pi(R_m^2 - R_{m-1}^2) = \pi\lambda L = \pi R_1^2$$

لإيجاد الأضطراب الضوئي (سعة الموجة) عند النقطة  $P$  ، نتبع المعالجة الرياضية التالية :

نفرض ان :  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$  تمثل الإضطراب لكل مناطق فرينل ، وحيث ان التغير في طور الموجة الحائدة من اي منطقة والمنطقة المجاورة لها يساوي  $\pi$  ، لذلك تكون مجموع مساهمات كل المناطق في السعة المحصلة كما يلي:

$$|U_p| = |U_1| - |U_2| + |U_3| - \dots \quad (5.37)$$

سنعرض بعض الحالات لتطبيق معادلة (5.37) ، وهي كما يلي :

#### ▪ حيود الفتحة الدائرية

لنفرض ان حاجزا فيه ثقب ضيق ، مركزه  $O$  ، اذا كانت هذه الفتحة تشمل على  $n$  منطقة ، بحيث تكون كل المناطق متساوية المساحة مما يجعل جميع قيم  $|U_i|$  المساهمة في السعة المحصلة تقريبا متساوية . وعليه ، اذا كان عدد المناطق زوجيا ، فإن المجموع في معادلة (5.37) يساوي الصفر . اما إذا كان عدد المناطق فرديا ، فإن هذا المجموع يساوي  $|U_1|$  .

عند اعتبار عامل الميلان وعامل المسافة الشعاعية (باتجاه نصف القطر)  $radial\ distance$  بين نقاط اي منطقة من مناطق فرينل والنقطة  $P$  في تكامل فرينل - كيرشوف (معادلة 5.11) ، نجد ان قيم السعة  $|U_n|$  تتناقص مع ازدياد قيم  $n$  . وعليه ، اذا كانت  $n \rightarrow \infty$  ( حالة الفتحة الكبيرة وغير المحدودة) ، يكون الإضطراب الضوئي عند  $P$  يساوي نصف مساهمة منطقة فرينل الأولى . ولبرهان صحة ذلك ، نعيد كتابة معادلة (5.37) على الصورة التالية:

$$|U_p| = \frac{1}{2}|U_1| + (\frac{1}{2}|U_1| - |U_2| + \frac{1}{2}|U_3|) + (\frac{1}{2}|U_3| - |U_4| + \frac{1}{2}|U_5|) + \dots \quad (5.38)$$

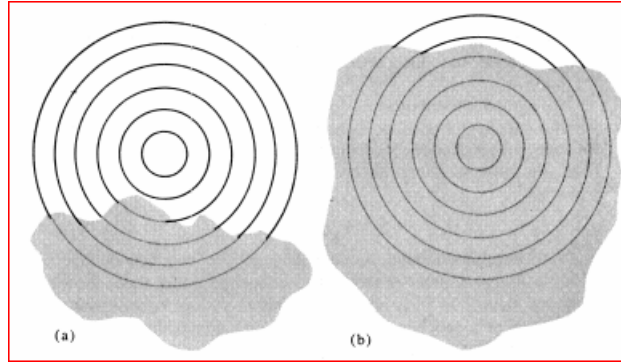
اذا كان التناقص في مقدار السعة لكل منطقة مع زيادة رتبة المنطقة  $n$  بطيئا ، عندئذ يمكن اعتبار قيم  $|U_n|$  تساوي تقريبا متوسط قيمتي السعة المساهم بها من منطقتين مجاورتين لها ، اي :  $|U_2| = \frac{|U_1| + |U_3|}{2}$  ، وهكذا ..... ، وعليه ، تتلاشى الحدود التي في أقواس معادلة (5.38) ، وتؤول السعة المحصلة (الإضطراب) عند النقطة  $P$  الى  $\frac{1}{2} |U_1|$  ،

$$|U_p| = \frac{1}{2} |U_1| \quad ، \text{ اي ،}$$

▪ حيود العائق الدائري *circular obstacle diffraction*

عند استبدال الفتحة الدائرية بقرص دائري ، تؤدي طريقة فريزل الى نتيجة مثيرة ممثلة بوجود بقعة مضيئة *bright spot* عند مركز الظل . ولمعالجة هذه الحالة ، يكون من المناسب البدء برسم المناطق عند حافة القرص بدلا من المركز. كما تكون قيمة  $|U_p|$  تساوي نصف السعة التي تساهم بها المنطقة الأولى وحدها. ولذلك ، تكون الإنشعاعية ( الشدة الضوئية ) عند  $P$  مساوية لتلك الشدة الناتجة عن الموجة غير المحجوبة . أيضا ، هذا ينسحب على النقاط الواقعة على المحور فقط ، بينما في حالة النقاط البعيدة عن المحور ، تكون هذه الشدة الضوئية ذات مقادير صغيرة وتعطي حلقات ضعيفة متحدة المركز.

يمكن التمييز بين حالتين من الجسم العائق : جسم عائق غير منتظم وآخر منتظم. في حالة الجسم العائق غير المنتظم ، يكون ظهور مناطق فريزل عند  $P$  كما في الشكل (5.21).



شكل (5.21) مناطق فريزل لمصدر نقطي خلف عائق غير منتظم :

(a) الظل الهندسي الخارجي. (b) الظل الهندسي الداخلي.

في المنطقة المضاءة (a) تكون المناطق الخارجية محجوبة جزئيا *partially blocked* ، ولذلك تصغر قيم الحدود العليا في معادلة (5.37) بدرجة اكبر من تلك في حالة عدم وجود العائق مع عدم تتغير الحدود الأولى . نتيجة لذلك ، فإن التغير في قيمة  $|U_p|$  يكون صعبا . ومن ناحية اخرى ، في حالة (b) ، تكون المنطقة المركزية محجوبة تماما ، بينما تكون المناطق الخارجية معوقة جزئيا *partially obstructed* . وفقا لذلك ، تتلاشى كل الحدود في المجموع عند كلا الطرفين. اما اذا كانت  $P$  منطقة مضاءة ، فإن وجود العائق او عدمه لا يغير شيئا في نمط الحيود لهذه الحالة . اما في منطقة الظل ، تكون قيمة الاضطراب الضوئي صغيرة جدا ( وهذا يتفق مع مبادئ الضوء الهندسي لمسار الشعاع في خطوط مستقيمة ) . كما تظهر اهداب الحيود حول الظل اذا كانت التشوهات عند حواف العائق صغيرة بالنسبة لنصف قطر منطقة فريزل الأولى.

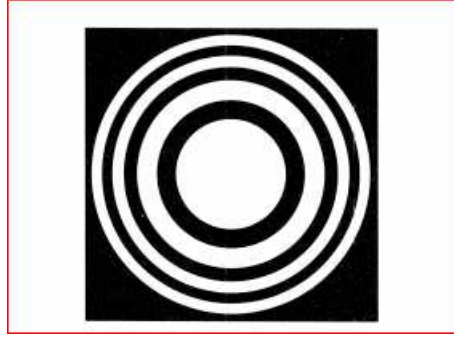
كما توضح الدراسة التامة للحيود عند عائق دائري انه بجانب البقع والحلقات الخافتة في الظل توجد هدب دائرية لامعة تحد الجزء الخارجي للظل. كما يمكن رؤية البقعة المضيئة في مركز ظل قطعة معدنية ( دائرية الشكل ) بواسطة فحص منطقة الظل الناشئة عن مصدر ضوئي على بعد عدة امتار . عمليا ، يكون من الأفضل استخدام عدسة مكبرة ، حيث تكون البقعة في هذه الحالة بالغة الصغر ومن الصعب ملاحظتها .

## ▪ لوح المناطق *zone Plate*

لوح المناطق عبارة عن حاجز مصمم بحيث يحجب الضوء من بعض مناطق فريزل دون الأخرى ، اي قد يحجب المناطق ذات الرتب الزوجية او الفردية .وتكون النتيجة التخلص من جميع الحدود الموجبة في معادلة (5.37) او من الحدود السالبة . وعليه ، تزداد السعة عند  $P$  في اي من الحالتين عدة مرات عن قيمتها في الحالات السابقة . اي،

$$|U_p| = |U_1| + |U_3| + |U_5| + \dots \quad (5.39)$$

عمليا ، يمكن تصنيع لوح لوح المناطق برسم دوائر متحدة المركز على ورقة بيضاء ، انصاف اقطارها تتناسب مع الجذر التربيعي للأعداد الصحيحة الموجبة ( كما في شكل 5.22) ، ثم تظلل المناطق واحدة دون الأخرى، وتصور منها صور فوتوغرافية مصغرة . عندما توضع الصورة السالبة ( مسودة الصورة) في طريق ضوء صادر من مصدر نقطي بالقرب منها نحصل على شدة ضوئية كبيرة عند نقطة على محوره .



شكل (5.22) لوح مناطق.

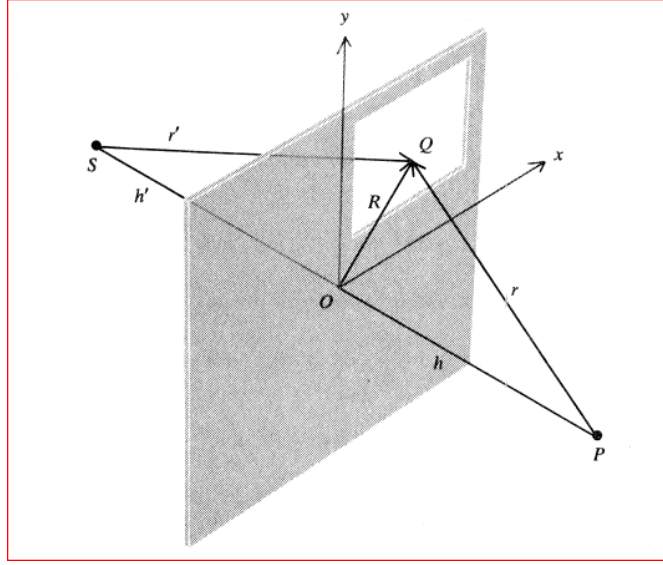
وعليه ، تكون البقعة المضيئة الناتجة عن لوح المناطق بالغة الشدة بحيث يعمل هذا اللوح الى حد كبير عمل العدسة اللامة *converging lens*، وتمثل الكمية  $L$  في المعادلة (5.36) البعد البؤري لهذه العدسة ، والذي يعطى بدلالة نصف قطر المنطقة الأولى وطول موجة الشعاع الحائد كما يلي

$$L = \frac{R_1^2}{\lambda} \quad (5.40)$$

من الجدير بالذكر ، انه تم إختراع لوح المناطق بواسطة اللورد رالي ( 1871) .

## ▪ الفتحة المستطيلة *Rectilinear Aperture*

تم دراسة حيود فريزل في حالة الفتحات المستطيلة بإستخدام قانون فريزل – كيرشوف ( معادلة 5.11) . لنفرض ان الأحداثيات الكارتيزية للنقطة  $Q$  في مستوى فتحة الحيود المستطيلة هي  $(x,y)$  ، ونقطة اصل المحاور الكارتيزية  $O$  ( كما في الشكل 5.23) . وعليه ،  $R^2 = x^2 + y^2$  .



شكل (5.22) هندسة الفتحة المستطيلة.

باستخدام معادلتني (5.36) ، (5.35) ، نحصل على القيمة التقريبية للمسافة  $SQP$  ، وهي

$$r + r' = h + h' + \frac{1}{2L} (x^2 + y^2) \quad (5.41)$$

وكما سبق شرحه في حالة حيود فرنفور ، نفترض ان عامل الميلان والمسافة الشعاعية تتغيران ببطء بالنسبة لمقدار العامل الأسّي المركب ،  $e^{ik(r+r')}$  ، وبذلك يمكن إخراج هذين العاملين من تحت إشارة التكامل في قانون فريزل – كيرشوف لتصبح صورة هذا القانون كما يلي

$$\begin{aligned} U_p &= C \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} e^{ik(x^2+y^2)/2L} dx dy \\ &= C \int_{x_1}^{x_2} e^{ikx^2/2L} dx \int_{y_1}^{y_2} e^{iky^2/2L} dy \end{aligned} \quad (5.42)$$

حيث الثابت  $C$  يساوي حاصل ضرب كل الثوابت في التكامل.

باستعمال المتغيرات التالية

$$u = x \sqrt{\frac{k}{\pi L}} \quad v = y \sqrt{\frac{k}{\pi L}}$$

وبدلالة طول موجة الشعاع ، تكون هذه المتغيرات بالصيغة الرياضية

$$u = x \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \quad v = y \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \quad (5.43)$$

حيث تحدد قيمة  $L$  من المعادلة (5.36) . عند استخدام هذه المتغيرات في التكامل السابق ، نجد ان

$$U_p = U_1 \int_{u_1}^{u_2} e^{i\pi u^2/2} du \int_{v_1}^{v_2} e^{i\pi v^2/2} dv \quad (5.44)$$

حيث :  $U_1 = C\pi k/L$

كما يتم اجراء التكاملات في معادلة (5.44) بدلالة تكامل آخر معرف كالتالي:

$$\int_0^s e^{i\pi w^2/2} dw = C(s) + iS(s) \quad (5.45)$$

حيث

$$C(s) = \int_0^s \cos(\pi w^2/2) dw$$

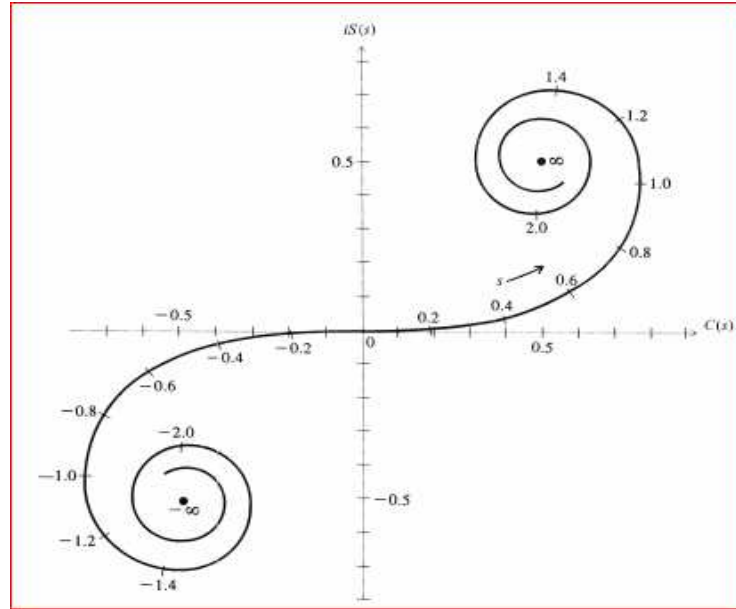
$$S(s) = \int_0^s \sin(\pi w^2/2) dw \quad (5.46)$$

وتعرف هذه التكاملات (معادلة 5.46) بتكاملات فرينل *Fresnel Integrals* ، وتكون القيم العددية لهذه التكاملات لقيم المتغير  $s$  كما في جدول (5.2) . كما يمكن رسم العلاقة البيانية بين هذه التكاملات بإعتبار المحور الأفقي يمثل قيم الجزء الحقيقي  $C(s)$  و المحور الرأسي يمثل الجزء التخيلي  $iS(s)$  . وتظهر هذه العلاقة على صورة منحنى على شكل حلزون ويسمى حلزون كورنو *Cornu Spiral* ( كما في الشكل 5.24) .



$s$	$C(s)$	$S(s)$
0.0	0.000	0.000
0.2	0.200	0.004
0.4	0.398	0.033
0.6	0.581	0.111
0.8	0.723	0.249
1.0	0.780	0.438
1.2	0.715	0.623
1.4	0.543	0.714
1.6	0.366	0.638
1.8	0.334	0.451
2.0	0.488	0.343
2.5	0.457	0.619
3.0	0.606	0.496
3.5	0.533	0.415
4.0	0.498	0.420
$\infty$	0.500	0.500

جدول (5.2) القيم العددية لتكاملات فريبل .



شكل (5.24) حلزون كورنو.

#### ■ ملاحظات حول منحنى كورنو

- (1) تعطى قيم احداثيات اي نقطة على هذا المنحنى بالنسبة للحد العلوي  $s$  في حدي تكامل فريبل (معادلة 5.46) .
- (2) يكون المقياس  $s$  مدونا بشكل مباشر على المنحنى وله اقسام متساوية على طول هذا المنحنى.

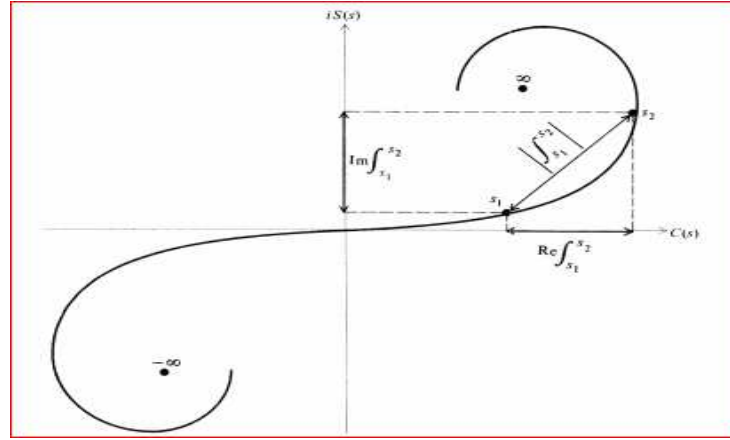
(3) عند نقطة الأصل  $s = 0$  ، يكون المنحنى مواز لمحور  $x$  ، كما يكون هذا المنحنى موازي لمحور  $y$  عند النقطة  $s = 1$  . ويتكرر ذلك مع الدوران عليه ، اي يكون موازيا لمحور  $x$  عند  $s = \sqrt{2}$  ،  $2$  ، ويكون المنحنى مواز لمحور  $y$  عند  $s = 3$  .

(4) يكون للمنحنى نقطتي نهاية  $endpoints$  ، تسمى **عيون الحلزون** ، وتقع عند  $s \rightarrow \pm\infty$  . وتكون احداثيات العين العلوية :  $x = y = 0.5$  ، بينما تكون احداثيات العين السفلية :  $x = y = -0.5$  .

(يمكن برهان ذلك باستخدام المتطابقة التالية:  $\int_0^\infty \sin^2 at^2 dt = \int_0^\infty \cos^2 at dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2a}}$  .)

يستفاد من حلزون كورنو في ايجاد قيم تكاملات فريزل المحدودة بالنقاط  $s_2, s_1$  ، وتتلخص الطريقة كما يلي :

نرسم خطا مستقيما يصل بين النقطتين المشار اليهما في التكامل المفروض والواقعتين على منحنى كورنو ( كما في الشكل 5.24b) ، فيكون طول القطعة المستقيمة ( الوتر  $chord$  )  $s_1 s_2$  مساويا لمقدار هذا التكامل. بينما تكون طول مساقط هذا الوتر على المحور الأفقي والمحور الرأسى  $S(s)$  ،  $C(s)$  ممثلة لقيم الجزء الحقيقي والتخيلي لهذا التكامل ، على الترتيب.



شكل (5.24b) ايجاد قيم تكامل فريزل بواسطة منحنى كورنو.

من معادلة (5.46) ، نجد ان طول عنصر ما على قوس منحنى كورنو  $ds$  يساوي  $(ds)^2 = (dC)^2 + (dS)^2$

، ويكون الطول الكلي للقوس على المنحنى يساوي الفرق بين النهايتين، تحديدا ،  $s_2 - s_1$  ، وهذا الفرق يتناسب مع حجم الفتحة ، اي

$$s_2 - s_1 = u_2 - u_1 = (x_2 - x_1) \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \quad \text{في البعد } x$$

$$s_2 - s_1 = v_2 - v_1 = (y_2 - y_1) \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} \quad \text{في البعد } y$$

لإيجاد المقدار التقريبي للمتغير  $s$  ، يمكن اعتبار ان طول القوس على حلزون كورنو تقريبا يساوي طول الوتر الواصل بين نقطتي نهايتي هذا القوس ، لنفرض ان بداية القوس ( النقطة الأولى) عند نقطة اصل المحاور (0,0) ، ونهاية القوس ( النقطة الثانية ) عند الأحداثيات  $(u, v)$  . وعليه ،

$$s_x = u = x \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} ; s_y = v = y \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$$

باستخدام نظرية المثلث قائم الزاوية ، نحصل عل التالي

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)} \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} = R \sqrt{\frac{2}{\lambda L}}$$

#### ▪ تطبيقات على حيود فرينل :

(1) الفتحة غير المحدودة ( الحالة المتناهية او الغائية ) ،

في هذه الحالة ، تكون قيم الأحداثيات كما يلي:

$$u_2 = v_2 = \infty ; u_1 = v_1 = -\infty$$

في حالة عدم وجود عائق ( يساوي  $U_1(1+i)^2$  ) ،  $C(-\infty) = S(-\infty) = -1/2$  ،  $C(\infty) = S(\infty) = 1/2$  ، كما تكون قيمة الإضطراب الضوئي ( في

باستخدام حلزون كورنو ، يكون مقدار الإضطراب الضوئي مساويا لحاصل ضرب  $U_1$  بطول الخط المستقيم من الممتد من  $\infty$  الى  $-\infty$  ( شكل b 5.24) ، وبجعل هذا المقدار يساوي  $U_0$  ، يمكن ان نعبر عن الحالة العامة بالشكل المعياري التالي:

$$U_p = \frac{U_0}{(1+i)^2} [C(u) + iS(u)]_{u_1}^{u_2} [C(v) + iS(v)]_{v_1}^{v_2} \quad (5.47)$$

(2) الشق والحافة المستقيمة *slit and straight edge*

يعالج حيود فرينل للشق الطويل بطريقة مشابهة للفتحة المستطيلة في الحالة اللانهائية ( الغائية ) *the limiting case* ، وتحديدنا نجعل أحداثيات حدود الشق الطويل في معادلة (5.47) كما يلي:  $U_1 \rightarrow -\infty$  ،  $U_2 \rightarrow +\infty$  . وعليه ، تؤول هذه المعادلة الى التالي

$$U_P = \frac{U_0}{1+i} [C(v) + iS(v)]_{v_1}^{v_2} \quad (5.48)$$

حيث ،  $v_2, v_1$  هما احداثيات حافتي الشق المحدودتين .

اما حيود الحافة المستقيمة ( حافة شفرة ) ، تتم معالجته كما في حالة الشق الطويل المتناهي في احد ابعاده ، اي  $v_1 = -\infty$  ، وعليه تؤول معادلة ( 5.48 ) الى التالي

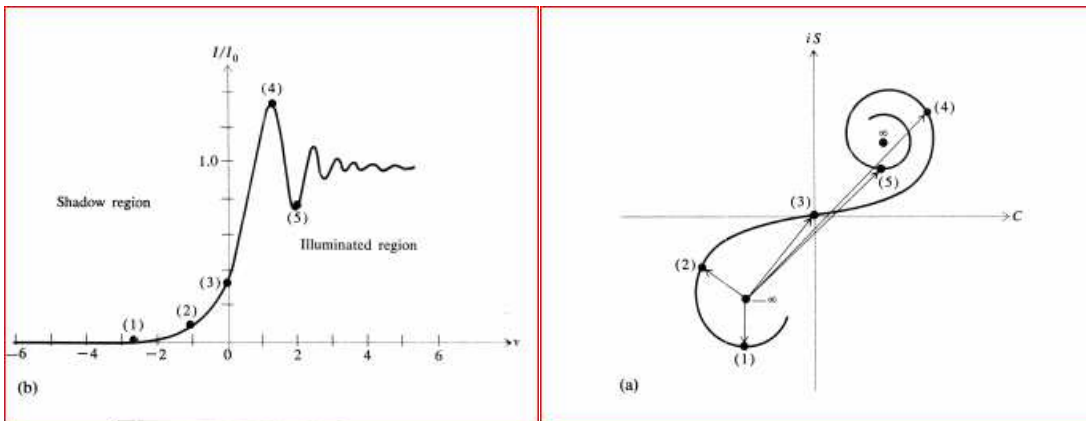
$$\begin{aligned} U_P &= \frac{U_0}{1+i} [C(v) + iS(v)]_{-\infty}^{v_2} \\ &= \frac{U_0}{1+i} \left[ C(v_2) + iS(v_2) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \right] \end{aligned} \quad (5.49)$$

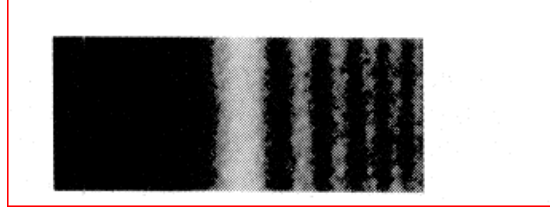
نلاحظ ان في معادلة (5.49) ، تكون السعة المحصلة ( الإضطراب الضوئي ) دالة للمتغير  $v_2$  . فإذا كانت النقطة المستقبلية للموجة واقعة تماما عند حافة الظل الهندسي فإن  $v_2 = 0$  . وعليه ،

$$U_P = \left[ \frac{U_0}{1+i} \right] \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \right] = \frac{1}{2} U_0$$

كما تكون الإنشعاعية عند هذه النقطة تعادل  $\frac{1}{4}$  القيمة المناظرة لها بدون وجود العائق .

باعتبار نقاط محددة على منحنى كورنو ( الشكل 5.25a ) ، يمكن رسم شدة الإضطراب الضوئي النسبي  $(I/I_0)$  عند تلك النقاط ، حيث  $I_P = |U_P|^2$  ، كدالة للإحداثي  $v$  ( الشكل 5.25b ) .





شكل (5.25) حيود فريزل للحافة المستقيمة (a) نقاط حلزون كورنو (b) منحنى الشدة النسبية كدالة  $v$

صورة فوتوغرافية لنمط الحيود.

نستنتج من هذا المنحنى ما يلي:

(1) تتناقص قيم الإنشعاعية ( الشدة الضوئية) بسرعة في منطقة الظل  $shadow\ region$  ( $v_2 < 0$ ) عندما :  
 $v_2 \rightarrow -\infty$ .

(2) في المنطقة المضاءة ( $illuminated\ region$ ) ، حيث ( $v_2 > 0$ ) ، تكون الإنشعاعية متذبذبة ومضمحلة حول قيمة  $U_0$  كلما اقتربت قيم هذا الإحداثي من المالانهاية ( $v_2 \rightarrow \infty$ ) . تكون اكبر قيمة للإنشعاعية في المنطقة المضاءة عند  $v_2 \approx 1.25$  ، مساوية 1.37 مرة لمقدار انشعاعية الموجة غير المعوقة ( بدون وجود العائق). وعليه ، يشاهد هذا على شكل هدب مضيء بجوار منطقة الظل الهندسي ( لاحظ الصورة الفوتوغرافية لنمط الحيود في الشكل (5.25) .

### مثال (5.5)

وضع شق منفرد ، اتساعه  $0.25\text{ mm}$  ، عند نقطة منتصف البعد بين مصدر نقطي وشاشة ، اذا كان هذا البعد يساوي  $4\text{ m}$  ، وكان طول موجة الضوء المار خلال الشق  $500\text{ nm}$  . جد سعة الموجة الحائدة وكذلك شدة الضوء عند النقطة المركزية على هذه الشاشة ؟.

الحل

نجد  $L$  بإستخدام العلاقة :

$$L = \left[ \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} \right]^{-1} \rightarrow \frac{1}{L} = \left[ \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} \right] = \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = 1$$

ثم نستخدم العلاقة التالية:

$$s = R \sqrt{\frac{2}{\lambda L}} = 0.25 \times 10^{-3} \sqrt{\frac{2}{(1)(500 \times 10^{-9})}} = 0.5$$

إذا اعتبرنا ان منحى الحلزون تقريبا خطي ، عندئذ ينطبق كلا من الوتر والقوس على بعضهما البعض ، ويمتدان من - 0.25 الى +0.25 . ولذلك ، تكون السعة المحصلة كما يلي:

$$U_p \approx s \approx 0.5$$

وكذلك ، تكون الشدة :

$$I_p \propto |U_p|^2 = 0.25$$

### مثال(5.6)

باستخدام حلزون كورنو ، جد الشدة النسبية عند نقطة ما ، حيث

$$(1) \quad v = -1.00 \quad ، \quad \text{النقطة في داخل منطقة الظل.}$$

$$(2) \quad v = +1.00 \quad ، \quad \text{النقطة خارج منطقة الظل .}$$

### الحل

باستخدام جدول (5.2) ، عند  $v = 1.00$  ، نجد ان:  $y = 0.438$  ،  $x = 0.78$  ، اذن ،

(1) **داخل الظل** ، نتعامل مع العين السفلى للحلزون ، وعليه ، يمتد الوتر من الإحداثيات ( -0.5 , -0.5 ) الى

(-0.78, - 0.438) ، ونطرح القيم العددية لمركبات  $x, y$  ، اي

$$\Delta x = 0.5 - 0.78 = 0.28 \quad ; \quad \Delta y = 0.5 - 0.438 = 0.0617$$

حيث ان بناء كورنو يعطي قيمة الشدة التي تساوي مرتين من تلك الشدة للموجة غير المعوقة ، لذلك تكون الشدة النسبية عند هذه النقطة تساوي:

$$I_p = \frac{1}{2} [(0.28)^2 + (0.0617)^2] I_0 = 0.04I_0$$

(2) **خارج الظل** ، يكون الوتر ممتدا من العين السفلى الى الربع الأول، ولذلك نضيف مكونات  $x, y$  ، اي

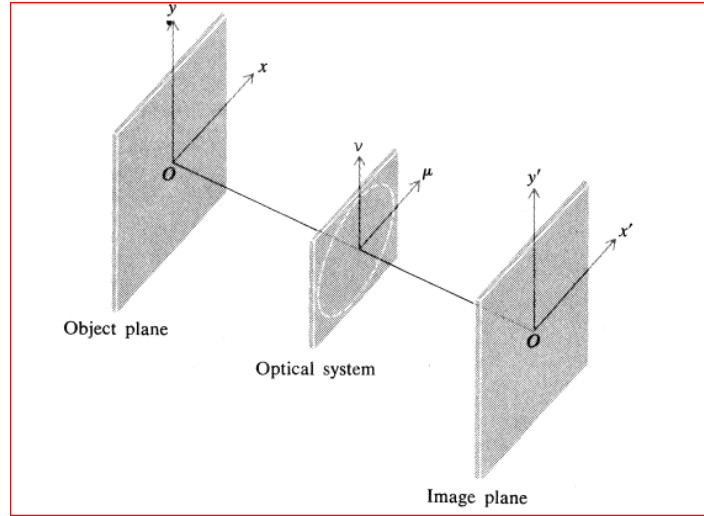
$$\Delta x = 0.5 + 0.78 = 1.28 \quad ; \quad \Delta y = 0.5 + 0.438 = 0.9383$$

كما تكون الشدة النسبية :

$$I_p = \frac{1}{2} [(1.28)^2 + (0.9383)^2] I_0 = 1.26I_0$$

### (5.6) تطبيقات تحويل فورييه في الحيود Application of Fourier Transform in Diffraction

سنتناول في هذا البند مناقشة الحيود في الحالة العامة عند فتحة ما، مع اعتبار الإختلاف الطوري لإجزاء هذه الفتحة .  
نختار الإحداثيات في مستوى الفتحة ( مستوى  $xy$  ) كما في الشكل (5.26) ، بينما يظهر نمط الحيود في المستوى  $XY$  ( المستوى البؤري للعدسة اللامة في حالة حيود فرنهوفر )



شكل (5.26) الترتيب الهندسي لتكوين الصورة في النظام البصري في الحالة العامة.

اعتمادا على مبادئ الضوء الهندسي ، نفرض ان الأشعة الحائدة في اتجاه ما تحدد بجيوب التمام  $direction cosines$  الزوايا  $(\alpha, \beta, \gamma)$  ، حيث تتركز هذه الأشعة في بؤرة مشتركة عند النقطة  $P(X, Y)$  والتي تكون احداثياتها كما يلي:  
حيث  $X = L\alpha$  ،  $Y = L\beta$  ،  $L =$  البعد البؤري للعدسة. في حالة الزويا الصغيرة ، يمكن استخدام التقريب التالي :  
 $\alpha \approx \tan \alpha$  ،  $\beta \approx \tan \beta$  ، بينما اذا كانت الأشعة الساقطة في مستوى  $xy$  ، فإن  $\gamma = 1$  .

لنعتبر شعاعين منطلقين من النقطتين :  $O$  ،  $Q(x,y)$  وبشكل متوازي ( كما في الشكل 5.27 ) . يكون فرق المسار  $\delta r$  بينهما كما يلي :

$$\delta r = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad , \quad \mathbf{R} = ix + jy \quad , \quad \hat{\mathbf{n}} = i\alpha + j\beta + k\gamma$$

اذن ،

$$\delta r = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{n}} = x\alpha + y\beta = x \frac{X}{L} + y \frac{Y}{L} \quad (5.50)$$

وعليه ، تصبح صورة تكامل الحيود الأساسية (معادلة 5.16) في المستوى  $XY$  كما يلي

$$U(X,Y) = \iint e^{ik\delta r} d\mathcal{A} = \iint e^{ik(xX+yY)/L} dx dy \quad (5.51)$$

( على اعتبار ان الثابت = 1 ) .

وبعبارة اخرى ، في حالة الفتحة المستطيلة والمنتظمة ، يكون التكامل المزدوج عبارة عن حاصل ضرب تكاملين كلا منهما احادي البعد *one dimensional integral* . في حالة الفتحة غير المنتظمة *nonuniform aperture* ، نستخدم دالة  $g(x,y)$  ، التي تعرف بدالة النفوذ *aperture function* و يكون حاصل ضرب هذه الدالة مع عنصر مساحة في مستوى الفتحة  $g(x,y)dxdy$  ممثلا لسعة الموجة الصادرة من هذا العنصر.

عوضا عن معادلة (5.51) ، يمكن التعبير عن العلاقة المذكورة بشكل اكثر شمولا كالتالي:

$$U(X,Y) = \iint g(x,y) e^{i(Xx+Yy)\frac{k}{L}} dxdy \quad (5.52)$$

لنفرض ان ،

$$\mu = \frac{kX}{L} \quad \text{and} \quad \nu = \frac{kY}{L} \quad (5.53)$$

وتسمى هذه الكميات ( معادلة 5.53 ) بالترددات المكانية *spatial frequencies* ، حيث ابعادها تماثل ابعاد العدد الموجي *wave number* . بدلالة الترددات المكانية ، تؤول معادلة (5.52) الى الصورة التالية:

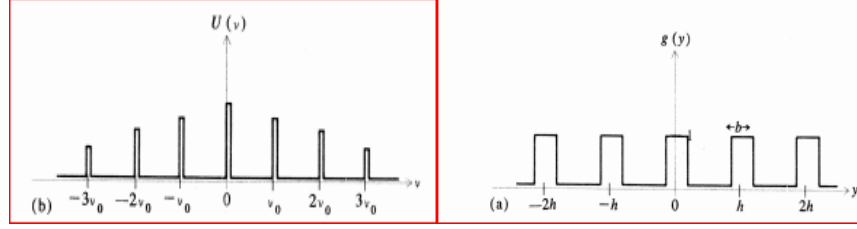
$$U(\mu,\nu) = \iint g(x,y) e^{i(\mu x + \nu y)} dx dy \quad (5.54)$$

ومن هذه المعادلة ، نلاحظ ان الدالتين  $U(\mu,\nu)$  ،  $g(x,y)$  تمثلان زوج تحويل فورييه في بعدين . فيزيائيا ، هذا يعني ان نمط الحيود هو فعلا تحويل فورييه لدالة فتحة النفوذ .

كمثال على ذلك ، نتناول دراسة نمط الحيود في محزوزة الحيود *Grating* . ولتسهيل المعالجة الرياضية ، نتعامل مع مسألة البعد واحد *one-dimensional problem* . لنفرض ان  $g(y)$  تمثل دالة خطوة دورية *periodic step function* ، ( كما في الشكل 5.28 ) وذات صيغة رياضية ممثلة بمتسلسلة فورييه كما يلي

$$g(y) = g_0 + g_1 \cos(\nu_0 y) + g_2 \cos(2\nu_0 y) + \dots \quad (5.55)$$





شكل (5.28) (a) مخطط فتحة الحيود في المحزوز (b) تحويل فورييه لهذه الفتحة .

حيث ،  $\nu_0$  التردد المكاني الأساسي ، ويعطى المقدار التالي :

$$\nu_0 = \frac{2\pi}{h} \quad (5.56)$$

حيث ،  $h$  المسافة بين خطوط المحزوز *grating spacing* .

كما يظهر هذا التردد المكاني في نمط الحيود على شكل **نهلية عظمية أولى** *first order Maxima* ، حيث تتناسب سعتها مع  $g_1$  . وتقابل النهايات العظمية ذات الرتب الأعلى مكونات فورييه لدالة فتحة النفوذ (معادلة 5.50).

فمثلا ، اذا كانت دالة فتحة النفوذ بصورة دالة جيب التمام ، اي ،  $g(y) = g_0 + g_1 \cos(\nu_0 y)$  ، فإن نمط الحيود يتكون من النهاية العظمية الرئيسية المركزية وعلى جانبيها اثنتان من النهاية العظمية الأولى ، بينما تختفي جميع النهايات الثانوية .

### ▪ التسطیح (التقویر) Apodization

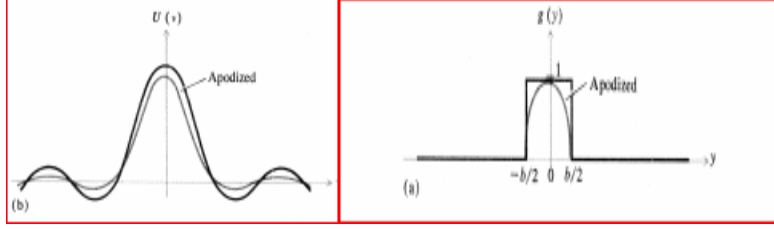
لغويا ، تعني كلمة "التسطيح" ازالة الأقدام "no feet" . اما فيزيائيا ، فتعني عملية التغيير التقني لدالة فتحة النفوذ بحيث تتم اعادة توزيع الطاقة الضوئية في نمط الحيود على الشاشة . عمليا ، يستفاد من هذه التقنية في زيادة الشدة المركزية وذلك بازالة الطاقة الضوئية للنهايات العظمية الثانوية في نمط الحيود .

ولتوضيح عملية التسطيح ، نورد المثال التالي:

لنعتبر فتحة حيود بصورة شق منفرد . وعليه ، تكون الصورة الرياضية لهذه الفتحة معرفة كالتالي :

$$g(y) = \begin{cases} 1 & -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \\ 0 & \text{ذلك عدا} \end{cases}$$

(كما في الشكل 5.29).



شكل (5.29) (a) دالة فتحة النفوذ (b) تحويل فورييه لهذه الدالة .

يكون نمط الحيود المقابل ، بدلالة الترددات المكانية ، كما يلي

$$U(\nu) = \int_{-b/2}^{+b/2} e^{i\nu y} dy = b \frac{\sin(\frac{1}{2}\nu b)}{(\frac{1}{2}\nu b)} \quad (5.57)$$

ثم لنفرض ان التغير في دالة فتحة النفوذ اصبح ، بفعل تقنية التسطيح ، كما يلي:

$$g(y) = \cos(\pi y/b) \quad ; \quad -b/2 \leq y \leq b/2$$

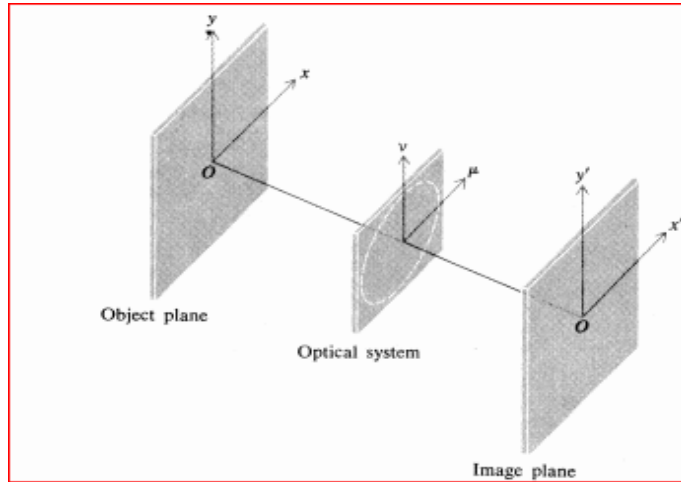
عمليا ، تغطي فتحة النفوذ بشريحة زجاجية ذات نفاذية مختلفة عند النقاط التي تقع في مستوى الشريحة ، وتكون هذه النفاذية اكبر ما يمكن في الوسط و□فرا عند الأطراف وفقا لقيم للدالة  $g(y)$ . كما يكون نمط الحيود الجديد ( بعد وضع الشريحة على فتحة النفوذ) كالتالي:

$$\begin{aligned} U(\nu) &= \int_{-b/2}^{+b/2} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{i\nu y} dy \\ &= \cos(\nu b/2) \left( \frac{1}{\nu - \pi/b} - \frac{1}{\nu + \pi/b} \right) \end{aligned} \quad (5.58)$$

بيانيا ، تكون المقارنة بين نمطي الحيود في الحالتين ( مع وبدون الشريحة ) كما في الشكل ( 5.29b ) ، ويلاحظ من هذا الشكل ان قيم النهايات العظمى الثانوية تضمحل بالمقارنة مع النهاية المركزية . وبعبارة اخرى ، تعمل تقنية التسطيح على محو او ازالة الترددات المكانية العالية . عمليا ، عند تسطيح الفتحة الدائرية في التلسكوبات الفلكية، يتم اختزال الشدة النسبية في حلقات نمط الحيود التي تظهر في صور النجوم ، وهذا يعزز قدرة هذا التلسكوب لتحليل صور النجوم المعتمة المتواجدة بالقرب من النجم المضيء.

## ■ الترشيح المكاني *Spatial Filtering*

لنفرض ان شعاعا متخالفا طوريا coherently يسقط على جسما ما موضوعا في مستوى  $xy$  *plane object* (الشكل (5.30) ) وأمام نظام بصري ( عدسة ) *optical system* الذي يكون صورة لهذا الجسم في المستوى  $x'y'$  *Image plane*. لنفرض ان نمط الحيود لدالة الجسم  $g(x, y)$  يمثل بالدالة  $U(\mu, \nu)$  ، حيث هذا النمط يقع في المستوى  $\mu\nu$  والذي يشابه المستوى  $XY$  في الشكل (5.26). وعليه ، فإن معادلة (5.54) تبين ان الدالة  $U(\mu, \nu)$  ما هي إلا تحويل فورييه للدالة  $g(x, y)$ . وكذلك تكون دالة الصورة  $g'(x', y')$  الواقعة في المستوى  $x'y'$  تحويل فورييه للدالة  $U(\mu, \nu)$ .



شكل (5.30) الترتيب الهندسي لتكوين الصورة في نظام بصري عام .

إذا كان هذا النظام البصري يسمح بنفاذ كل الترددات العالية في المدى:  $\mu = \pm \infty$  ;  $\nu = \pm \infty$  بالتساوي ، فإن دالة الصورة  $g'(x', y')$  تكون متناسبة تماما مع دالة الجسم  $g(x, y)$  ، أي ان الصورة تكون عبارة عن اعادة انتاج الجسم الحقيقي . لكن في الواقع العملي، بسبب حجم فتحة النفوذ المحدد في المستوي  $(\mu\nu)$  يجعل مدى الترددات المكانية المسموح بدخولها خلال هذا النظام البصري محددا ايضا ، كما تعمل الانحرافات ( الزوغان ) *Abberations* على تعديل الدالة  $U(\mu, \nu)$  . وعليه ، يمكن التعبير عن كل هذه التأثيرات على الصورة المتكونة بدالة رياضية  $T(\mu, \nu)$  ، والتي تعرف في البصريات بدالة النقل *Transfer function*، او

$$U'(\mu, \nu) = T(\mu, \nu) U(\mu, \nu)$$

وعليه ،

$$g'(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\mu, \nu) U(\mu, \nu) e^{-i(\mu x' + \nu y')} d\mu d\nu \quad (5.59)$$

فيزيائيا ، تشير معادلة (5.59) الى ان دالة الصورة هي تحويل فورييه لحاصل ضرب  $T(\mu, \nu)U(\mu, \nu)$ . كما تكون حدود التكامل بالشكل الإعتيادي:  $-\infty \rightarrow +\infty$  ، بينما في الواقع ، تكون الحدود الفعلية للتكامل معتمدة على الشكل الخاص لدالة النقل .

تقنيا ، تتم عملية تعديل دالة النقل بوضع شاشات او فتحات في مستوى  $\mu\nu$  ، وتسمى هذه العملية بالترشيح المكاني . وتمائل هذه العملية عملية ترشيح النبضات الكهربائية في الدوائر الإلكترونية ، حيث تقابل دالة الجسم الإشارة المدخلة *input signal* ، بينما تقابل دالة الصورة الإشارة المخرجة *output signal* ، ويعمل النظام البصري كمرشح يسمح او يمنع الترددات المكانية المعينة .

لتوضيح عملية الترشيح المكاني ، ندرس الحالة التالية :

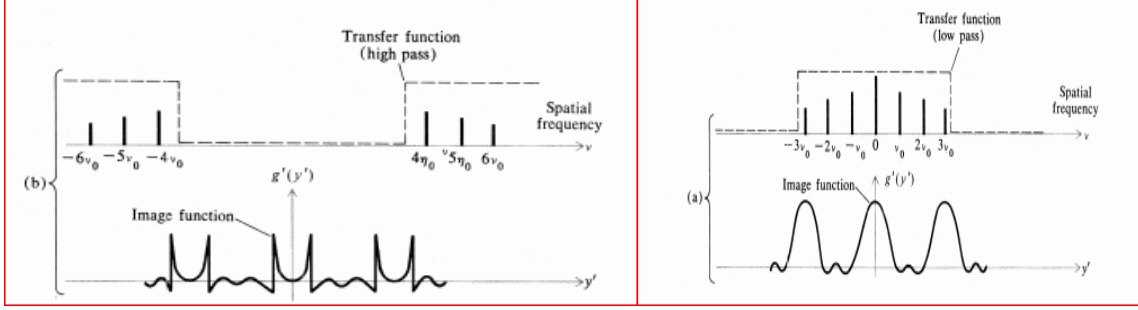
لنفرض ان الجسم عبارة عن محزوزة الحيود ، اي ان دالة الجسم هي دالة خطوة دورية . ليكن التعامل مع هذه المسألة في بعد واحد للتبسيط فقط . لنعتبر ان  $g(y)$  تمثل دالة الجسم ، و يكون تحويل فورييه لهذه الدالة  $U(\nu)$  ، (انظر الشكل 5.28) وليكن مستوى فتحة النفوذ هو  $\mu\nu$  بحيث تسمح هذه الفتحة بمرور الترددات المكانية ضمن المدى  $[-\nu_{max}, \nu_{max}]$  . في هذه الحالة ، تسمى هذه العملية بالترشيح منخفض المرور *Low Pass filtering* (الشكل 5.31a) . بالرجوع الى معادلة (5.53) ، نجد ان :  $\nu_{max} = kb/f$  ، حيث اتساع الفتحة يساوي  $(2b)$  ،  $f$  البعد البؤري للنظام البصري.

اذا كانت قيم دالة النقل كما يلي :  $T(\nu) = 1$  ، ضمن المدى  $[-\nu_{max}, \nu_{max}]$  ، وتساوي الصفر عدا ذلك ، فإن دالة الصورة *image function* تكون كما يلي :

$$g'(y') = \int_{-\nu_{max}}^{+\nu_{max}} U(\nu) e^{-i\nu y'} d\nu \quad (5.60)$$

كما يمكن دراسة هذه الدالة بيانيا ، (الشكل 5.31a) ، حيث تحسب قيم هذه الدالة للقيم المختارة من الأحداثي

$\nu_{max}$ .



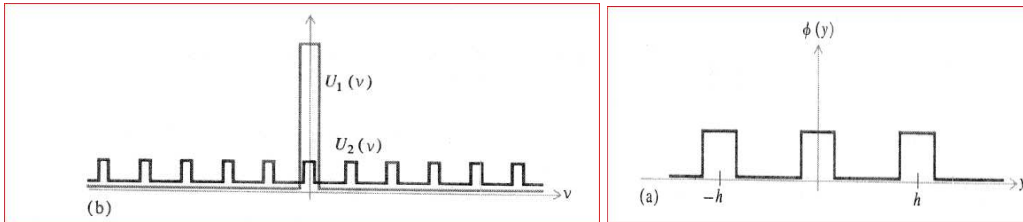
شكل (5.31): (a) مرشح مكاني منخفض المرور (b) مرشح مكاني عالي المرور.

من الشكل (5.31a) ، نلاحظ ان عملية الترشيح منخفض المرور تجعل دالة الصورة مستديرة حول الحواف مع وجود بعض التغيرات الدورية الصغيرة حول القيمة العظمى للدالة . اما اذا وضعت شاشة في المستوى  $\mu v$  ، بحيث تحجب block الجزء المركزي في نمط حيود فتحة النفوذ ( الذي يمثل الترددات المنخفضة في هذا النمط ) فإن هذه العملية تسمى بالترشيح عالي المرور *high Pass filtering* ، (الشكل (5.31b)).

من اهم تطبيقات عملية الترشيح المكاني ، استخدام هذه التقنية في تحسين جودة شعاع الليزر ، اذ يستخدم ثقب دبوس *pinhole* بدلا من الشاشة وذلك لإختزال الأهداب المزورة ( الزائفة ) في نمط الحيود .

### ■ التباين الطوري والمحزوزات الطورية *Phase Contrast and Phase Gratings*

ابتدع العالم الفيزيائي الألماني زيرنيك *Zernike* طريقة يتم بواسطتها اعادة رؤية جسم شفاف ، معامل انكسار مادته تختلف قليلا عن معامل انكسار الوسط المحيط به. وتسمى هذه الطريقة *بطريقة التباين الطوري* . وتستخدم هذه الطريقة في عمل الميكروسكوبات المصممة لرؤية الأعضاء الحية في اجسام الكائنات الحية . ويتلخص مبدأ العمل في هذه الطريقة على اساس استخدام نوع خاص من المرشحات المكانية. ولتوضيح هذا المبدأ ، نستخدم محزوز الحيود الطوري المكون من اشربة شفافة ومتناوبة من مرشحات المرور العالية والمنخفضة التردد على الترتيب. ويمثل هذا المحزوز عندما يضاء بشعاع متحالف في الطور الجسم *object* الذي دالته هي  $g(y) = e^{i\phi(y)}$  ، حيث  $\phi(y)$  تسمى *عامل الطور phase factor* . وتكون الصورة الرياضية لهذا العامل على شكل دالة دورية ( الشكل 5.32a) ، وهو يمثل ارتفاع الخطوة لتغير الطور الضوئي بين شريطين متعاقبين في المحزوز ، اي  $\Delta\phi = kz \Delta n$  ، حيث  $z$  سمك الشريط ،  $\Delta n$  الفرق بين معاملي انكسار هذه الأشربة .



شكل (5.32) (a) دالة طور المحزوز (b) تحويل فورييه لدالة الفتحة  $U_1$  ، ودالة المحزوز  $U_2$

ولتبسيط المعالجة الرياضية لهذه العملية ، نفرض ان  $\phi$  كمية صغيرة ، ثم نستخدم التقريب التالي لدالة الجسم

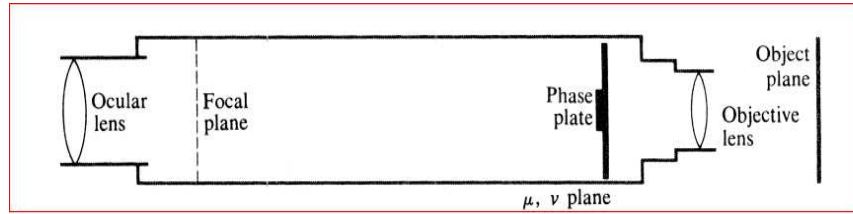
$$g(y) = 1 + i\phi(y) \quad (5.62)$$

وعليه ، يكون تحويل فورييه لهذه الدالة ( معادلة 5.62 ) كما يلي:

$$\begin{aligned} U(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} [1 + i\phi(y)] e^{ivy} dy = \int_{-b/2}^{+b/2} e^{ivy} dy + i \int_{-b/2}^{+b/2} \phi(y) e^{ivy} dy \\ &= U_1(v) + iU_2(v) \end{aligned} \quad (5.63)$$

حيث

$U_1(v)$  نمط حيود الفتحة (الجسم) و تساوي صفرا عند اي نقطة ما عدا  $v = 0$  ، اي ان  $U_1(v)$  هي تحويل فورييه للترددات المنخفضة فقط. ومن ناحية أخرى ، تكون  $U_2(v)$  نمط الحيود لدالة الخطوة الدورية  $\phi(y)$  ، وتمثل هاتين الدالتين بيانيا كما في الشكل (5.32b). كما يجعل العدد التخيلي ( $i$ ) في معادلة (5.63) مكونات الدالتين مختلفة في الطور بمقدار  $90^\circ$  . وبعبارة اخرى ، تعتمد طريقة التباين الطوري على إدخال مرشح مكاني في المستوى  $\mu v$  الذي يعمل على ازاحة طور الدالة  $U_2$  بمقدار  $90^\circ$  . عمليا ، تتم هذه الطريقة بإدخال لوح زجاجي شفاف ، بحيث يكون مقطع *section* صغير منه ذا سمك ضوئي يساوي مقدار اكبر قليلا من ربع طول موجة الضوء المستخدم ( الشكل 5.33) . كما يوضع هذا المقطع السميك نسبيا في مركز المستوى  $\mu v$  في المنطقة ذات الترددات المنخفضة، بين العدسة الشيئية *objective lens* والعدسة العينية *ocular lens* ، ويسمى هذا اللوح *لوح الطور phase Plate*



شكل (5.33) الترتيب القيزيائي للعناصر البصرية المكونة لميكروسكوب التباين الطوري .

رياضيا ، يعمل هذا اللوح على تغيير الدالة  $U_1 + iU_2$  الى الدالة  $U_1 + U_2$  ، كما نحصل على دالة الصورة الجديدة باستخدام تحويل فورييه لهذه الدالة الجديدة (  $U(v) = U_1 + U_2$  ) كما يلي:

$$\begin{aligned} g'(y') &= \int U_1(v) e^{-ivy'} dv + \int U_2(v) e^{-ivy'} dv \\ &= g_1(y') + g_2(y') \end{aligned} \quad (5.64)$$

حيث ،  $g_1 =$  دالة صورة الفتحة الكلية وتمثل خلفية *background* ثابتة . بينما ،  $g_2$  دالة صورة المحزوز المنتظم المكون من جميع الأشرطة المنفذة والمعتمة . وهذا يعني ان المحزوز الطوري يبدو في مستوى الصورة بشكل من الأشرطة المضيفة والمظلمة على التناوب. وتحاكي تقنية التباين الطوري في الضوء عملية التعديل السعوي *amplitude modulation* في الإتصالات الكهربائية ، حيث تتحول الإشارة *signal* المعدلة طوريا الى إشارة معدلة سعويا وذلك بعمل انزياح  $90^0$  على تردد الموجة الحاملة لهذه الإشارة . اي ، يتم تحويل التعديل الطوري للجسم الى تعديل سعوي لصورته.

### (5.7) اعادة بناء مقدمة الموجة بالحيود - التصوير الهلوجرافي

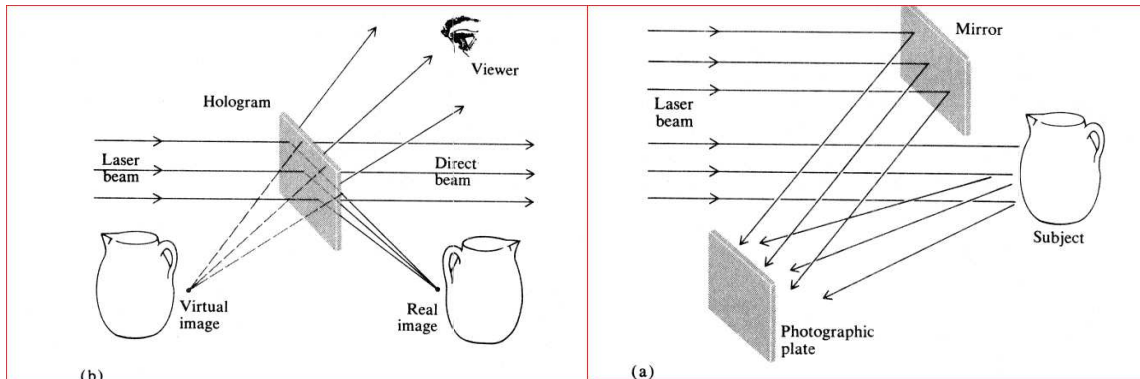
#### *Reconstruction of Wave Front by Diffraction – Holography*

حديثا ، اصبحت تقنية اعادة بناء مقدمة الموجة بأستخدام ظاهرة الحيود من المواضيع المعتبرة في مجال الضوء الحديث . مع ان فكرة هذه التقنية كانت متبلورة على يد العالم **غابور Gabor** في عام 1947 ، الا انها لم تدخل حيز التنفيذ العملي حتى ظهور تقنيات توليد اشعة الليزر المتطاورة ( المتحالفة في الطور).

وكلمة **هلوجرافيا** مشتقة من اصل يوناني وتعني **كتابة الكل** ، وتعرف بعملية جمع المعلومات البصرية عن جسم ما و تخزينها في طبقة حساسة ضوئيا ( فوتوغرافية ) والتي تسمى **هلوجرام ( او المسجل الضوئي الكامل )** . في هذه العملية ، لا يلزم استخدام اي نوع من العدسات ل تخزين هذه المعلومات الخاصة بالجسم . ويتبع ذلك ، الخطوة الثانية وهي خطوة اعادة بناء مقدمة الموجة ، حيث نسترجع المعلومات من المسجل الضوئي وتعرض بصريا على هيئة صورة واضحة لهذا الجسم الأصلي . ونلاحظ ان في خطوة الإسترجاع لا يلزم وجود عدسات ايضا.

#### الخطوة الأولى: انتاج الهلوجرام

تتم عملية انتاج الهلوجرام وفق الترتيبات الموضحة في الشكل (5.34a) ، اذ يستخدم شعاع من الليزر المتوازي *collimated beam* ( المتطاور او المتخالف طوريا ) ، وهذا شرط اساسي في هذه العملية .



شكل (5.34) (a) عملية انتاج الهلوجرام (b) عملية استرجاع الصورة من الهلوجرام .

وتتلخص عملية الإنتاج كما يلي: ينقسم شعاع الليزر الى حزمتين : **الحزمة الأولى** تنعكس عن سطح مرآة مستوية نحو فيلم تصوير عادي ( حساس للضوء ) ، وتسمى هذه الحزمة الضوئية **بالشعاع المرجعي Reference beam** ، بينما **الحزمة الثانية** تسقط مباشرة على الجسم المراد تسجيل معلوماته وتنعكس نحو الفيلم الضوئي الحساس (الشكل 5.34a) . ونتيجة لتراكب هذان الشعاعان في اي نقطة من الفيلم الضوئي، نحصل على نمط تداخل معقد ، يعرف **بالهولوجرام** ، اذ يحتوي على جميع المعلومات اللازمة لإعادة مجال موجة هذا الجسم. وبعبارة اخرى ، تكون كل نقطة في مستوى هذا الفيلم محتوية على جميع اجزاء صورة الجسم ( وهذا هو الفرق بين التصوير الهولوجرامي والتصوير الضوئي المعتاد) .

### الخطوة الثانية : استرجاع الصور من الهولوجرام

في هذه الخطوة ، يضاء الهولوجرام بشعاع منفرد من الليزر ( كما في الشكل 5.34b) ، لنحصل على جزء من مجال الموجة الحادثة التي تكون عبارة عن نسخة *copy* ثلاثية الأبعاد للموجة الأصلية المنعكسة عن الجسم في الخطوة الأولى . عند النظر بالعين المجردة خلال الهولوجرام ، يشاهد صورة في العمق *in depth* ، وتكون هذه الصورة خيالية *virtual image* ، وتظهر في موقع التقاء امتداد الأشعة الواصلة الى عين المشاهد . بينما تكون الأشعة النافذة من الهولوجرام صورة حقيقية للجسم وتقع في جهة المشاهد .

### ■ نظرية التصوير الهولوجرامي

لتسهيل دراسة نظرية التصوير الهولوجرامي ، نفرض ان الأشعة المرجعية متوازية ذات مقدمة موجة مستوية . لنعتبر ان مستوى لوح المسجل الضوئي هو المستوى  $xy$  ،  $U(x,y)$  تمثل السعة المركبة لمقدمة الموجة المنعكسة في هذا المستوى ، وتعرف هذه الدالة كما يلي:

$$U(x,y) = a(x,y)e^{i\phi(x,y)} \quad (5.65)$$

حيث  $a(x,y)$  دالة حقيقية *real function* .

لنفرض ان  $U_0(x,y)$  تمثل السعة المركبة للشعاع المرجعي ، وبما ان هذا الشعاع يقع في المستوى  $xy$  ، لذلك يمكن التعبير عن هذه السعة كالتالي:

$$U_0(x,y) = a_0 e^{i(\mu x + \nu y)} \quad (5.66)$$

حيث  $a_0$  ثابت ،  $(\mu, \nu)$  تمثل الترددات المكانية للشعاع المرجعي في مستوى  $xy$  ، وتعطى بدلالة اتجاهات هذا الشعاع كما يلي:

$$\mu = k \sin \alpha \quad \nu = k \sin \beta \quad (5.67)$$

حيث  $k$  العدد الموجي المصاحب لشعاع الليزر الذي يحدد اتجاهه بدلالة الزوايا  $\alpha, \beta$  .

لنفرض ان  $I(x,y)$  الإشعاعية (او الشدة الضوئية) المسجلة على فيلم التصوير الضوئي الحساس ، و بناء عليه ، يكون مقدار هذه الشدة بدلالة مربع السعات السابقة كما يلي



$$\begin{aligned}
I(x,y) &= \|U + U_0\|^2 = a^2 + a_0^2 + aa_0e^{i[\phi(x,y) - \mu x - \nu y]} + aa_0e^{-i[\phi(x,y) - \mu x - \nu y]} \\
&= a^2 + a_0^2 + 2aa_0 \cos [\phi(x,y) - \mu x - \nu y]
\end{aligned}
\tag{5.68}$$

تمثل هذه المعادلة التعبير الرياضي لنمط تداخلي ، حيث تحوي على المعلومات المعبرة عن التعديل السعوي والطوري للترددات المكانية لشعاع المرجع.

عند اضاءة هذا الهولوجرام والمسجل على الفيلم الضوئي بشعاع منفرد *single beam* سعته  $U_0$  المساوية لسعة الشعاع المرجعي ، نحصل على موجة نافذة من الفيلم سعته  $U_T$  والتي تتناسب مع حاصل ضرب  $U_0$  بنفاذية الهولوجرام عند النقطة  $(x,y)$  . وبما ان هذه النفاذية تتناسب مع الشدة  $I(x,y)$  ، لذلك يمكن التعبير عن  $U_T$  ( مع اعتبار قيم الثابت تساوي الوحدة ) كما يلي

$$\begin{aligned}
U_T(x,y) &= U_0 I = a_0(a^2 + a_0^2)e^{i(\mu x + \nu y)} + a_0^2 a e^{i\phi} + a_0^2 a e^{-i(\phi - 2\mu x - 2\nu y)} \\
&= (a^2 + a_0^2)U_0 + a_0^2 U + a^2 U^{-1} U_0^{-2}
\end{aligned}
\tag{5.69}$$

الى حد ما ، يمكن القول ان الهولوجرام يشابه في عمله محزوز الحيود ، إذ ينتج من هذه العملية ( استرجاع مقدمة الموجة ) شعاعا مباشرا *direct beam* ، وشعاعين حائدين ، من الرتبة الأولى، على جانبي هذا الشعاع المباشر ( الشكل 5.34b ) . بالرجوع الى معادلة (5.69) ، نجد ان الحد الأول يتوافق مع سعة الشعاع المباشر ، بينما يمثل الحد الثاني سعة احد الأشعة الحائدة ويكون مسؤولا عن اعادة الشعاع المنعكس عن الجسم في الخطوة الأولى من انتاج الهولوجرام ، كما ان لهذا الشعاع دورا في تشكيل الصورة الخيالية التي يراها المشاهد عند النظر خلال الهولوجرام. اما الحد الأخير في هذه المعادلة ، يكون ممثلا للأشعة الحائدة الأخرى والتي تشكل الصورة الحقيقية .

لنعتبر حالة بسيطة ، حيث يكون الجسم المراد تسجيل معلوماته ضوئيا عبارة عن خطا ابيضضا على خلفية سوداء . هنا يكون الهولوجرام الناتج من العملية عبارة عن محزوز حيود دوري، اذ تشكل الرتبة الصفرية في نمط الحيود الشعاع المباشر ، بينما تشكل الرتبتان الأولى على جانبي هذه الرتبة الصورة الحقيقية والخيالية للجسم.

في السنوات الأخيرة ، تم تطوير تقنيات متقدمة في مجال الهولوجرافيا ، حيث يمكن الآن الحصول على هولوجرام ملون ، وذلك باستخدام ثلاث موجات ليزيرية ، كما يمكن التسجيل على اغشية سوداء او بيضاء . كما تم تطبيق فكرة التصوير الهولوجرافي باستخدام موجات صوتية *acoustic waves* في حالة وجود جسم في وسط معتم ضوئيا ، او باستخدام الموجات الميكرووية *microwaves* في حالة المسافات البعيدة . كما اصبح من الممكن استبدال الأفلام الحساسة ضوئيا بأوساط مكونة من بلورات الليثيوم  $\text{LiNbO}_3$  ، اذ تستطيع البلورة الواحدة تخزين 1000 هولوجرام في حجم  $1.0 \text{ cm}^3$  .

## تمارين

(5.1) استخدم مصدر ضوئي نقطي (ثقب ابرة)، حيث  $\lambda = 600nm$  ، في تجربة الحيود ، فإذا كانت المسافة بين هذا المصدر وفتحة النفوذ  $10m$  ، وقطر الثقب  $1.0 mm$  ، حدد نوع الحيود في الحالات التالية (1) المسافة بين الفتحة والشاشة المستقبلية تساوي  $1.0 cm$  ، (2)  $2.0 m$  .؟

(5.2) اذا سقط شعاع متوازي من الليزر ( $\lambda = 623 nm$ ) عموديا على شق ضيق اتساعه  $0.5mm$  ، ووضعت عدسة لامة ( $f = 50 cm$ ) خلف الشق لتركيز الشعاع على شاشة موضوعة عند البعد البؤري للعدسة . جد المسافة من مركز نمط الحيود ( موقع النهاية العظمى المركزية ) الى موقع اول نهاية صغرى ، وكذلك موقع اول نهاية عظمى ثانوية .

(5.3) اذا استخدم ضوء ابيض في تجربة الحيود ، جد عند اي طول موجة يمكن ان تنطبق النهاية العظمى الرابعة على النهاية العظمى الثالثة في حالة استخدام الضوء الأحمر ( $\lambda = 650nm$ ) .؟

(5.4) في تجربة الشق الضيق المنفرد ، حيث تتناقص شدة الأهداب كلما ابتعدنا عن موقع النهاية العظمى المركزية ، جد ترتيب الهدب الذي تكون شدته الضوئية تساوي نصف شدة الهدب المركزي ( استخدم حيود فرنفور ) .؟

(5.5) برهن ان النهايات العظمى الثانوية في نمط حيود فرنفور تقع عند النقاط التي تكون حلا للمعادلة :

$$\beta = \tan \beta ، \text{ ثم بين ان الجذور الثلاثة الأولى هي: } \beta = 1.43\pi , 2.46\pi , 3.47\pi ؟$$

(5.6) في نمط حيود فرنفور للفتحة المستطيلة ، تقع النهايات العظمى القطرية  $diagonal\ maxima$  على الخط  $\alpha = \beta$  ، جد الشدة النسبية ( $I/I_0$ ) للنهاية العظمى القطرية الأولى .؟

(5.7) جد نصف قطر فتحة التليسكوب القادر على تفريق مكونات نجم مزدوج ، اذا كان التفريق الخطي بين المكونات تساوي  $10^8 km$  ، والبعد عن الأرض  $10$  سنوات ضوئية ( اعتبر  $\lambda = 5000nm$  ) .؟

(5.8) في تجربة حيود فرنفور للشق المزدوج ، وجد ان النهاية العظمى الرابعة مفقودة ( محجوبة ) ، جد النسبة بين اتساع الشق الى البعد بينهما ( $b/h$ ) .؟

(5.9) بين ان نمط حيود فرنفور للشق المزدوج يصبح مشابها لنمط حيود الشق المنفرد الذي اتساعه ( $2b$ ) ، وعندما يكون  $h = b$  .؟

(5.10) (a) جد عدد خطوط المحزوز اللازمة لتفريق خطي الصوديوم ( $D - line$ ) في الرتبة الأولى ، حيث ( $589 nm, 589.6 nm$ ) .؟

(b) اذا كان البعد البؤري للعدسة المركزة للأشعة نحو الشاشة  $90 cm$  ، واتساع منطقة المحزوز  $2 cm$  ، جد المسافة الخطية بين هذين الخطين في المستوى البؤري للعدسة ( عند الشاشة ) .؟

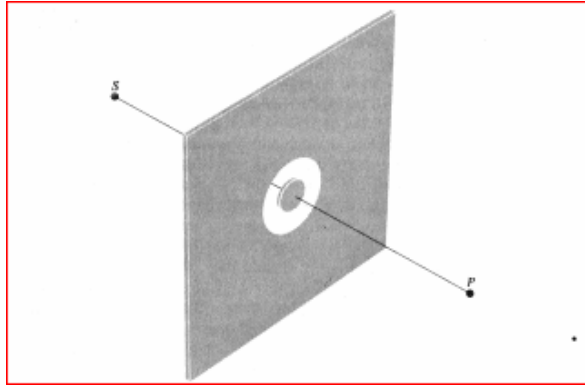
(5.11) يتكون محزوز حيود من 100 خط ، جد الشدة النسبية بين النهاية العظمى المركزية والنهاية العظمى الأولى  $(I_1/I_0)$  .؟

(5.12) برهن ان عدد النهايات العظمى المحصورة داخل المغلف المركزي في نمط حيود الشق المزدوج يساوي  $(2 + \frac{2h}{b})$  .؟

(5.13) محزوز حيود به  $1000 \text{ line/mm}$  ، جد عرض منطقة هذا المحزوز كي يستطيع تفريق مكونات نمط من حيود شعاع الليزر  $(\lambda = 633 \text{ nm})$  ، علما ان فرق التردد بين هذه الأنماط يساوي  $450 \text{ MHz}$  .؟

(5.14) جد اقل طول موجة يمكن تحليلها بواسطة محزوز  $1200 \text{ line/mm}$  وعرضه  $5 \text{ cm}$  ، حيث  $\lambda = 5000 \text{ nm}$  ، ويستخدم المحزوز في الرتبة الأولى .؟

(5.15) وضع مصدر ضوئي نقطي  $S$  يصدر شعاعا بطول موجة  $5000 \text{ nm}$  على بعد  $1.0 \text{ m}$  من فتحة نفوذ على شكل ثقب دائري نصف قطره  $1.0 \text{ mm}$  ، فإذا كان في هذا الثقب قرص معتم نصف قطره  $0.5 \text{ mm}$  (كما في الشكل 5.35) ، وكانت النقطة المستقبلية تبعد  $1.0 \text{ m}$  عن هذه الفتحة ، جد الإشعاعية عند  $P$  بدلالة الإشعاعية بدون الفتحة .؟



شكل (5.35) فتحة نفوذ المسألة (5.15)

(5.16) يراقب تلسكوب راديوي فلكي مصدر نقطي بعيد باستخدام موجة طولها  $20 \text{ cm}$  ، فإذا مر القمر من امام المصدر ، وتم ترسيم نمط حيود فرينل بواسطة هذا التليسكوب ، جد الفترة الزمنية بين النهاية العظمى الأولى والنهاية الصغرى الأولى (افرض ان القمر يسبب هذا الحيود وحافته مستقيمة).

(5.17) استخدم معادلة (5.12) مباشرة لبرهان ان قيمة  $U_p$  الناتجة من منطقة فرينل الأولى تساوي ضعف قيمتها بدون وجود فتحة النفوذ اطلاقا .؟

(5.18) جد الشدة عند النقطة  $P$  في مسألة (5.15) اذا كانت ابعاد الفتحة  $2 \times 2 \text{ mm}$  .؟

(5.19) يتكون جسما ما من اشربة منفردة بيضاء اتساعها  $b$  ، على فرض ان المسألة ذات بعد احادي ، جد التردد المكاني  $U(\nu)$  في حالة اضاءة هذا الجسم بشعاع متطور .؟

(5.20) بالرجوع الى معادلة (5.19) ، اذا كانت الفتحة  $\mu v$  محددة بالإحداثي  $\pm v_{max}$  ، وتقع  $v_{max}$  على الصفر الثاني للدالة  $U(v)$  ، جد دالة الموجة المحصلة  $g'(y')$  ، ( عبر عن الجواب بدلالة النكامل فقط )؟.

(5.21) جد نمط الحيود الناتج عن الشق المسطح (*Apodized slit*) ، الذي تكون نفاذيته كما يلي:

$$T(x) = \begin{cases} g(y) & -b/2 \leq y \leq b/2 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ثم جد الشدة النسبية للنهاية العظمى الثانوية الأولى ؟.

## الفصل السادس : انتشار الضوء في الأوساط المادية

### *Propagation of Light in Meduim*

نتناول في هذا الفصل الصور الرياضية لمعادلات ماكسويل في الأوساط المادية : الموصلة والعازلة . كما سندرس معادلة الموجة في هذه الأوساط وما يترتب على ذلك من ظواهر الإمتصاص والانعكاس عند الحد الفاصل بين هذه الأوساط. كما سندرس انتشار الضوء في البلورات المختلفة وظاهرة الإنكسار المزدوج في البلورات ونعرض ظاهرة دوران فارادي للضوء في الجوامد . كما نقدم في هذا الفصل وصفا للظواهر الضوئية-المغناطيسية والضوئية – الكهربائية .

#### (6.1) مقدمة

حديثا ، تعتبر دراسة سلوك انتشار الضوء وتفاعل الضوء مع مادة الوسط من أهم فروع الضوء التطبيقية الحديثة ، اذ ان كثيرا من الظواهر الضوئية المختلفة تظهر عند مرور الشعاع الضوئي خلال المواد الصلبة ، تحديدا ، الإمتصاص الإنتقائي ، التشتت ، الإستقطاب ، والظواهر الكهروضوئية والمغناطيسية التي يمكن فهمها بإستخدام القواعد الأساسية للنظرية الكهرومغناطيسية . لذلك ، سنتناول في هذا الفصل تطبيق نظرية ماكسويل العيانية *Macroscopic Maxwell Theory* لدى مرور الضوء ( الموجة الكهرومغناطيسية ) خلال بلورات المادة الصلبة.

بداية ، نستعرض المعالجة الكلاسيكية لتفسير هذه الظواهر الضوئية ، اذ تعطي هذه المعالجة تحليلا معتبرا الى حد ما وتساعد في بناء خلقية اساسية لوصفها . مع ذلك ، لا بد من تطبيق المعالجة الكمية لتفسير هذه الظواهر الضوئية بشكل دقيق عوضا عن هذه المعالجة الكلاسيكية (سيرد شرح ذلك في الفصول اللاحقة من هذا الكتاب).

#### (6.2) المجالات العيانية ومعادلات ماكسويل *Macroscopic Fields and Maxwell's Equation*

فيزيانيا ، يمكن وصف الحالة الكهرومغناطيسية للمادة عند نقطة ما بدلالة الكميات الأساسية التالية:

(1) كثافة الشحنة الكهربائية الحجمية ( $\rho$ ) .

(2) الكثافة الحجمية لثنائي القطب الكهربائي في الوسط ، والتي تعطى بدلالة استقطاب المادة  $\mathbf{P}$ .

(3) الكثافة الحجمية لثنائي القطب المغناطيسي في الوسط ، والتي تعطى بدلالة تمغنت المادة  $\mathbf{M}$ .

(4) كثافة شدة التيار الكهربائي  $\mathbf{J}$  ، وهي تعبر عن شدة التيار الكهربائي المار عبر وحدة المساحة العمودية في الوسط.

ولمزيد من الدقة في القياس ، نعتبر المتوسط العياني لهذه الكميات ، وذلك لتقليل الخطأ الناتج عن الأختلافات المجهرية في مواقع الذرات المادية للوسط. لنفرض ان  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  تشير الى متوسط متجه شدة المجال الكهربائي والمغناطيسي ، اذ ترتبط هذه الكميات بشكل رياضي وفقا لمعادلات ماكسويل التالية :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \quad (6.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (6.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (6.4)$$

وعند استخدام مفهوم الإزاحة الكهربائية  $\mathbf{D}$  ، حيث  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  ، وكذلك مفهوم الحث المغناطيسي  $\mathbf{B}$  ، حيث  $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$  ، تصبح معادلات ماكسويل السابقة على الصور التالية:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (6.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (6.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.8)$$

كما تكون استجابة الكثرونات التوصيل في الوسط للمجال الكهربائي المسلط عليها خارجيا ، كما يلي:  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  ، حيث  $\sigma$  الموصلية *conductivity* ، وتمثل هذه العلاقة صورة قانون اوم في الكهربائية . كما تكون العلاقة بين الأزاحة وشدة المجال الكهربائي على النحو  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  ، وبالمقابل ، نجد ان العلاقة المغناطيسية :  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  .

وبطريقة اخرى ، يمكن التعبير عن استجابة الشحنات الكهربائية المقيدة للمجال الكهربائي الخارجي ( الإستقطاب ) كالتالي:

$$\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} = \chi \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (6.9)$$

ويسمى عامل التناسب  $\chi$  ، بين الإستقطاب وشدة المجال الكهربائي ( في معادلة 6.9 ) *بالقابلية الكهربائية electic susceptibility* ، او  $\chi = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1$  . تعتبر القابلية الكهربائية من المعاملات المهمة عند دراسة انتشار الضوء في الأوساط المادية . هناك جداول تعطي قيم هذا المعامل للأوساط المادية المختلفة . كما يمكن تصنيف الأوساط المادية بإعتبار قيم هذا المعامل الى نوعين هما :

(1) وسط متمائل المناحي *isotropic medium* (مثل الزجاج) ، اذ تكون  $\chi$  كمية عددية وبنفس القيمة للإتجاهات المختلفة من المجال الكهربائي المسلط .

(2) وسط غير متمائل المناحي (*non-isotropic medium*) (مثل البلورات) ، حيث تكون قيمة الإستقطاب مختلفة وفقا لإتجاهات المجال الكهربائي المسلط عليها من الخارج ، وتكون قيم  $\chi$  ممثلة بما يعرف رياضيا *الممتد Tensor* ، ويعبر هذا الممتد عن معظم الخواص الضوئية للبلورة (كما سيرد شرحه لاحقا).

### (6.3) معادلة الموجة العامة *General Wave Equation*

في دراستنا لسلوك الضوء في الأوساط المادية الصلبة ، نفترض ان هذه الأوساط غير مغناطيسية ومتعادلة كهربيا ، اي ، تكون قيم  $\rho = 0$  ،  $M = 0$  . وعليه تصبح المعادلات (6.1- 6.4) على الصور الرياضية التالية:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (6.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (6.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (6.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (6.13)$$

لإشتقاق معادلة اموجة المجال الكهربائي ، نأخذ التفاضل (*curl*) طرفي معادلة (6.10) ، ومن ثم نستخدم معادلة (6.11) للتعويض بدلا من المشتقة الزمنية لإلتفاف المجال المغناطيسي ( مع اعتبار ان المشتقة الزمنية وعملية الإلتفاف عمليتان مستقلتان حيث يمكن التبديل بينهما) ، وعليه ، نحصل على التالي:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (6.14)$$

ويسمى الحدين في الطرف الأيمن من معادلة (6.14) بحدي المصدر *source terms* ، لأنها تنتج من وجود الشحنات الإستقطابية والتوصيلية في الوسط ، وتؤثر هذه الحدود المصدرية على كيفية انتشار الضوء في الوسط (اي تؤثر على حل معادلة الموجة). فمثلا ، اذا كان الوسط غير موصلا ( $\sigma = 0 \rightarrow \mathbf{J} = 0$ ) ، فإن ذلك يؤدي الى انعدام الحد الثاني في هذه المعادلة ، ولا يبقى سوى الحد الأول ( $\mu_0 \partial^2 \mathbf{P} / \partial t^2$ ) كحد متغير في هذه المعادلة . وعليه ، يمكن تفسير كثيرا من الظواهر الضوئية الناتجة من مرور الضوء خلال هذه الأوساط المادية، مثل التشتت ، الإمتصاص ، والإنكسار المزدوج .

اما في حالة الأوساط المادية الموصلة ( المعادن) ، يصبح حد التوصيل ( $-\mu_0 \partial \mathbf{J} / \partial t$ ) هو الحد المعتبر في حل هذه المعادلة (6.14) ، وبالتالي يمكن تفسير ظاهرة الإنعكاس العالي للضوء وعدم الشفافية *opacity* في المعادن من خلال هذه الصورة الجديدة للمعادلة .

اما عند دراسة السلوك الضوئي في المواد شبه الموصلية *semi-conductors* ، لا بد من اعتبار الحدين في هذه المعادلة عند الشروع في حلها رياضيا، ويكون من الصعب حل هذه المعادلة جبريا ، لذلك ، نلجأ الى الطريقة الكلاسيكية عند دراسة السلوك الضوئي في هذه المواد لتبسيط وصف الخواص الضوئية لهذه المواد.

#### (6.4) انتشار الضوء في الأوساط العازلة متماثلة المناحي – التشتت

##### *Propagation of Light in Isotropic Dielectric Medium – Dispersion*

في حالة الأوساط المادية العازلة المتماثلة المناحي ، تكون الإلكترونات مقيدة مع ذرات هذه الأوساط ، ولا يوجد في هذه الأوساط اي اتجاه اختياري . وكمثال على ذلك ، نتناول سلوك الضوء في الوسط الزجاجي . لنفرض ان قوة المجال الكهربائي الخارجي المسلط على ذرات الوسط يسبب انزياحا لمواقع الكترولونات هذه الذرات عن وضع الإتزان *equilibrium* *r position* . و عليه ، يكون الإستقطاب العياني للوسط كما يلي:

$$\mathbf{P} = -Ner \quad (6.15)$$

حيث  $N$  عدد الإلكترونات في وحدة الحجم . اذا كان المجال الكهربائي الخارجي ساكنا وكانت الإلكترونات مقيدة الحركة بشكل مرن عن موقع التوازن ( كما في حالة الزنبرك المتذبذب) ، فإنه يمكن التعبير عن القوة المحركة باستخدام قانون هو  $\square$  كما يلي:

$$-eE = Kr \quad (6.16)$$

حيث  $K$  ثابت المرونة . في هذه المعادلة ، اهلقت القوة المغناطيسية الناجمة عن المجال المغناطيسي للموجة ، وذلك لصغر مقدارها بالنسبة للقوة الكهربائية . كما تكون شدة الأستقطاب الساكن كالتالي:

$$\mathbf{P} = \frac{Ne^2}{K} \mathbf{E} \quad (6.17)$$

اما في حالة المجال الكهربائي المتغير زمنيا ، تصبح معادلة الحركة للإلكترون كالتالي:

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + K\mathbf{r} = -e\mathbf{E} \quad (6.18)$$

ويمثل الحد  $m\gamma \partial\mathbf{r}/\partial t$  القوة المعيقة *damping force* للحركة والناجمة عن الإحتكاك، وهذه القوة تتناسب مع سرعة حركة الإلكترون ، ويعتبر المقدار  $m\gamma$  ثابت التناسب.

لنفرض ان المجال الكهربائي المسلط يتغير بشكل اسي مع الزمن (اي على صورة حركة توافقية بسيطة) ، رياضيا ، على شكل الدالة  $e^{-i\omega t}$  ، وعلى فرض ان حركة الإلكترون تتوافق مع نفس الإعتدال الزمني للمجال الكهربائي ، لذلك تؤول معادلة (6.18) الى التالي:

$$(-m\omega^2 - i\omega m\gamma + K)\mathbf{r} = -e\mathbf{E} \quad (6.19)$$



ويتبع ذلك ، ان شدة الإستقطاب ( معادلة 6.15 ) يكون كالتالي:

$$\mathbf{P} = \frac{Ne^2}{-m\omega^2 - i\omega\gamma + K} \mathbf{E} \quad (6.20)$$

ونلاحظ ان معادلة (6.20) تؤول الى معادلة (6.12) اذا كانت  $\omega = 0$  . كما ان شدة الإستقطاب تتناسب مع  $\omega$  مهما كانت سعة المجال الكهربائي الخارجي المسلط ، بينما نجد ان طور الإستقطاب  $P$  يعتمد على هذه السعة لوجود الحد التخيلي في مقام هذه المعادلة . ويمكن تحويل معادلة (6.20) الى الصورة الرياضية التالية:

$$\mathbf{P} = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \mathbf{E} \quad (6.21)$$

حيث

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (6.22)$$

وتعرف  $\omega_0$  بالتردد الرنيني الفعال *effective resonance frequency* . كما نلاحظ ان كمية شدة الإستقطاب ( معادلة 6.21 ) تتشابه مع سعة الأهتزازة في حالة المتذبذب التوافقي الإطاري *forced harmonic oscillator* (حركة المتذبذب التوافقي تحت تأثير قوة خارجية ) . وعليه ، يمكن الإستنتاج ان ظاهرة الرنين الضوئي تحدث في منطقة مجاورة للتردد الرنيني  $\omega_0$  .

ولتوضيح ان إستقطاب الوسط يؤثر على انتشار الضوء ، نعتمد على صورة المعادلة العامة للموجة (6.14) في حالة الوسط العازل ( بدون حد التوصيل ) ونعوض فيها عن مقدار الإستقطاب المعطى بالمعادلة (6.21) ، حيث نحصل على التالي:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{-\mu_0 Ne^2}{m} \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (6.23)$$

باستخدام العلاقة الخطية بين  $E, P$  ومعادلة (6.12) ، نجد ان

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} \quad (6.23) \text{ تصبح معادلة } \text{بعد ترتيب حدود هذه المعادلة واعتبار } 1/c^2 = \epsilon_0 \mu_0 \text{ كالتالي:}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \left( 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (6.24)$$

لنفرض ان الحل التجريبي لهذه المعادلة يكون على الصورة الرياضية التالية :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathcal{K}z - \omega t)} \quad (6.25)$$

ويمثل هذا الحل الصيغة الرياضية للموجات التوافقية المستوية المتجانسة . بالتعويض المباشر بهذا الحل في معادلة (6.24) نجد ان :

$$\mathcal{K}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right) \quad (6.26)$$

كما يتضمن وجود الحد التخيلي في مقام معادلة (6.26) ان العدد الموجي  $\mathcal{K}$  يجب ان يكون عددا مركبا *complex number* كما يلي

$$\mathcal{K} = k + i\alpha \quad (6.27)$$

كما يكون معامل انكسار الوسط عددا مركبا ، او

$$\mathcal{N} = n + i\kappa \quad (6.28)$$

حيث

$$\mathcal{K} = \frac{\omega}{c} \mathcal{N} \quad (6.29)$$

وعليه ، يكون الحل التجريبي على الصورة التالية :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.30)$$

في معادلة (6.30) ، يشير العامل  $e^{-\alpha z}$  الى ان سعة الموجة الضوئية تتناقص اسيا مع تقدمها في الوسط باتجاه محور  $z$  ، وان طاقة هذه الموجة تمتص خلال الإنتشار في هذا الوسط . وبما ان طاقة الموجة تتناسب طرديا مع مربع سعة الموجة ، لذلك تتغير طاقة هذه الموجة وفقا للعلاقة  $e^{-2\alpha z}$  ، ويكون معامل امتصاص الوسط مساوي للمقدار  $2\alpha$  . يسمى الجزء التخيلي في معامل الإنكسار ( $k$ ) **بمعامل الإنطفاء** *Extinction index* ، وتكون العلاقة بين هذين المعاملين كما يلي:

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \kappa \quad (6.31)$$

يدل **معامل الطور** *phase factor*  $e^{i(kz - \omega t)}$  على ان هذه الموجة المنتشرة في الوسط هي موجة توافقية وتنتشر بسرعة طورية تساوي

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \quad (6.32)$$

باستخدام معادلتني (6.26) ، (6.29) ، نحصل على ما يلي:

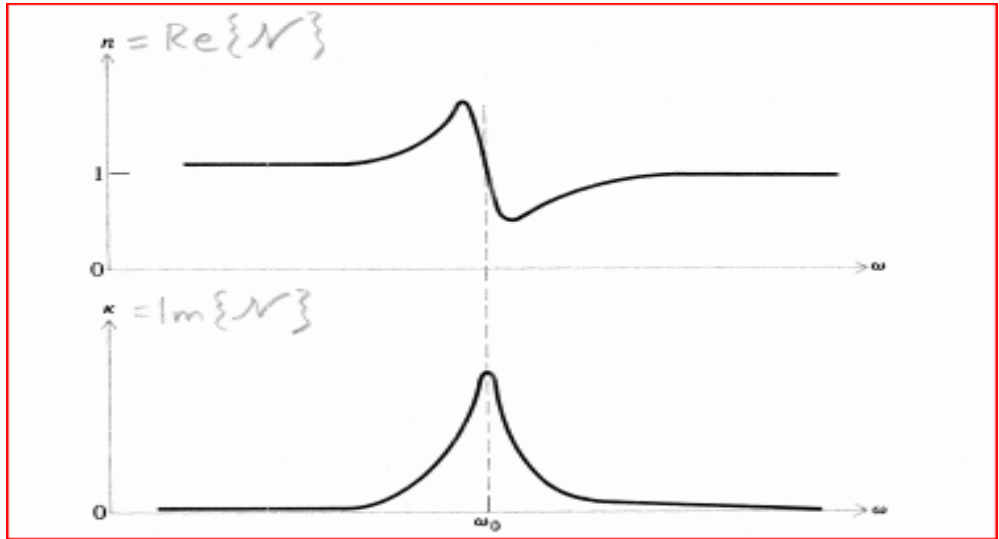
$$\mathcal{N}^2 = (n + i\kappa)^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \right) \quad (6.33)$$

بترتيب الحدود في هذه المعادلة و بفرز الحدود الحقيقية والتخيلية كلا على حدا في كلا جانبي المعادلة وبمساواة الحدود المتناظرة ، نجد ان

$$n^2 - \kappa^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left( \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \right) \quad (6.34)$$

$$2n\kappa = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left( \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \right) \quad (6.35)$$

يعطي حل هاتين المعادلتين المعاملات الضوئية للوسط :  $n, k$  . ويمكن التعبير عن العلاقة البيانية لمعاملات الإنكسار والإطفاء كدوال للتردد وبجوار خط الرنين المنفرد كما في الشكل (6.1) .



شكل (6.1) مخطط معاملات الإنكسار والإطفاء للوسط كدوال لتردد الموجة الضوئية بجوار خط الرنين .

من دراسة الشكل (6.1) ، يمكن ملاحظة ان عملية الأمتصاص الضوئي تكون اقوى ما يمكن عند التردد الرنيني  $\omega_0$  ، ويكون معامل الإنكسار اكبر من واحد عند الترددات المنخفضة ، بينما تزداد قيمته كلما اقترب مقدار التردد من  $\omega_0$  ، وهذا ما يعرف بالتشتت العادي *normal dispersion* الذي يظهر ذلك جليا في معظم الأوساط الشفافة لألوان الطيف المرئي . تكون قيم الترددات الرنينية الرئيسية واقعة ضمن المنطقة فوق بنفسجية *ultra violet region* ، وهناك نوع اخر من التشتت الضوئي يعرف بالتشتت الشاذ *anomalous dispersion* والذي يحدث بسبب تناقص معامل الإنكسار مع زيادة التردد . عمليا ، يلاحظ ان هذا النوع من التشتت يحدث عندما لا يكون الوسط معتما الى درجة كبيرة . فمثلا ،

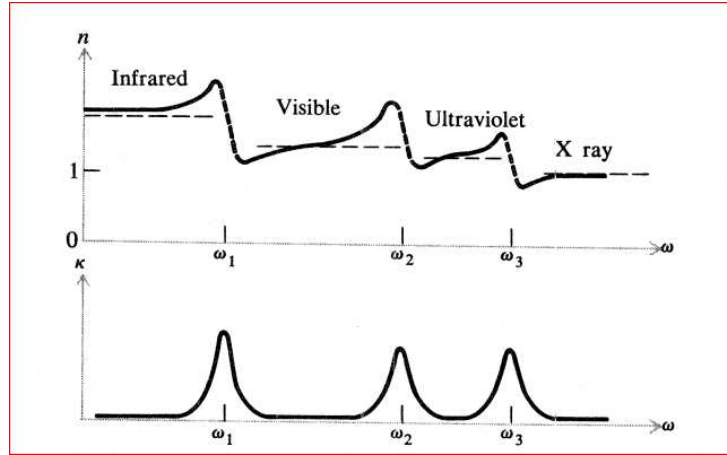
هناك انواع من الأصباع التي تمزج مع المواد المكونة للوسط ( الزجاج) وتجعل في المنطقة المرئية من الطيف اشربة *bands* امتصاصية التي تعطي تشتتا شادا في منطقة هذه الأشربة.

في الملاحظات السابقة ، تم الإفتراض ان جميع الإلكترونات في ذرات الوسط مقيدة *bounded* بنفس الكيفية وان لها نفس التردد الرنيني ، لكن عمليا ، تكون هذه الإلكترونات مقيدة بمقادير متفاوتة مما يجعل ترددها الرنيني مختلفا تبعا لذلك . لنفرض ان  $f_1$  يمثل كسرا من هذه الإلكترونات ذات التردد الرنيني  $\omega_1$  ، كما ان  $f_2$  يمثل كسرا من هذه الإلكترونات ذات التردد الرنيني  $\omega_2$  ، وهكذا ..... الخ . وعليه ، يكون مربع معامل الإنكسار المركب على الصورة التالية :

$$N^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_j \left( \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right) \quad (6.36)$$

حيث ،  $f_j$  يعبر عما يعرف بشدة المتذبذب *oscillator strength* ، كما تسمى  $\gamma_j$  ثوابت الإـمحلال *damping constants*.

ولدراسة اعتماد الجزء الحقيقي والتخيلي لمعامل الإنكسار المركب ( معادلة 6.36) ، يمكن استعراض المنحنى المبين في الشكل (6.2) الذي يعطي وصفا لسلوك الضوء المنتشر في وسط ما كالزجاج .



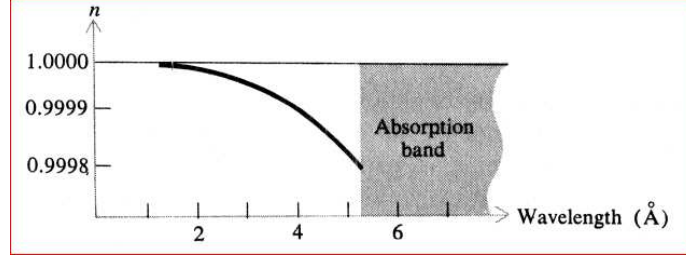
شكل (6.2) معاملات الإنكسار والإنطفاء كدوال لتردد الشعاع الضوئي .

نلاحظ من الشكل (6.2) ان الوسط يكون شفافا في المنطقة المرئية ( اي ، لا يوجد امتصاص ضوئي) ، ويملك اشربة امتصاصية في المنطقة تحت الحمراء *infrared* والمنطقة فوق بنفسجية *ultraviolet* من مناطق الطيف الضوئي . اما في حالة المنتهى *limiting case* ، اي  $\omega = 0$  ، فإن مربع معامل الإنكسار يكون كالتالي

$$1 + (Ne^2/m\epsilon_0) \sum_j f_j/\omega_j^2$$

ويكون مساويا لقيمة ثابت الغازل في الوسط الساكن .

اما في حالة الترددات العالية ، تتوقع النظرية هبوط معامل الإنكسار الى دون قيمة الوحدة ، ومن ثم يقترب من هذه القيمة عند اقتراب  $\omega$  من المالا نهائية ، وهذا يتفق مع النتائج العملية . يوضح الشكل (6.3) معمل الإنكسار كدالة لطول الموجة عند مرور الإشعة السينية في بلورة الكوارتز *Quartz* .



شكل (6.3) معامل الإنكسار في بلورة الكوارتز في منطقة الأشعة السينية كدالة لطول الموجة.

حالة خاصة: إذا كانت قيم ثوابت الإضمحلال صغيرة لدرجة كافية ، او  $\omega_j^2 - \omega^2 \gg \gamma_j \omega$  ، عندها تؤول معادلة (6.36) الى الصورة التالية :

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_j \left( \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2} \right) \quad (6.37)$$

اي ، يصبح معامل الإنكسار عددا حقيقيا .

### (6.5) انتشار الضوء في الأوساط الموصلة *propagation of light in conducting media*

لدراسة ظاهرة انتشار الضوء في الوسط الموصل ، نعلم على حل معادلة الموجة العامة مع اعتبار حد التوصيل بدلا من حد الإستقطاب ( كما سبق شرحه في البند السابق). كما نعتبر الحركة الفعلية للإلكترونات تحت تأثير المجال الكهربائي لموجة الشعاع الضوئي المارة عبر هذا الوسط. بما ان الكترونات التوصيل لا تكون مقيدة مع ذرات المادة ، لذلك لا يوجد قوة استرجاعية لإعادة هذه الإلكترونات الى وضع الإتزان *restoring force* . اذن ، تصبح معادلة الحركة التفاضلية لهذه الإلكترونات كالتالي

$$m \frac{dv}{dt} + m\tau^{-1}v = -eE \quad (6.38)$$

حيث يعرف الحد :  $m\tau^{-1}$  بثابت التبديد الإحتكاكي *frictional dissipation constant* ، ويمكن ربط هذا الثابت مع الموصلية كالتالي

$$\mathbf{J} = -Nev \quad (6.39)$$

حيث  $N$  عدد الكترونات التوصيل/ وحدة حجم . بإستخدام معادلة (6.39) لحذف  $v$  ، تصبح معادلة (6.38) بدلالة  $J$  كما يلي

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} + \tau^{-1}\mathbf{J} = \frac{Ne^2}{m} \mathbf{E} \quad (6.40)$$

كما يكون انحلال التيار العابر *transient current* محكوما بالمعادلة التفاضلية المتجانسة التالية:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} + \tau^{-1}\mathbf{J} = 0 \quad (6.41)$$

ويكون حل هذه المعادلة بالصورة الأسية التالية :  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 e^{-t/\tau}$  ، هذا يعني ان شدة التيار العابر تكون بمقدار  $e^{-1}$  من قيمتها الابتدائية (  $t=0$  ) بعد زمن يعرف بزمن الترخي *relaxation time* .

اما في حالة المجال الكهربائي الساكن ( المستقر ) *static field* ، فإن معادلة (6.40) تصبح على الصورة التالية :

$$\tau^{-1}\mathbf{J} = \frac{Ne^2}{m} \mathbf{E} \quad (6.42)$$

بالمقارنة مع قانون أوم ( بدلالة الموصلية ) ، نجد ان معادلة (6.4) تعطي موصلية الوسط

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m} \tau \quad (6.43)$$

في معادلة (6.40) ، نفرض ان  $\mathbf{E}$  ،  $\mathbf{J}$  تكون دوال تعتمد على الزمن بشكل توافقي، اي  $e^{-i\omega t}$  ، باستخدام هذه المعادلة نحصل على ما يلي :

$$(-i\omega + \tau^{-1})\mathbf{J} = \frac{Ne^2}{m} \mathbf{E} = \tau^{-1}\sigma\mathbf{E} \quad (6.44)$$

وبحل هذه المعادلة ، نجد ان كثافة التيار كما يلي :

$$\mathbf{J} = \frac{\sigma}{1 - i\omega\tau} \mathbf{E} \quad (6.45)$$

من هذه المعادلة (6.45) ، اذا كانت  $\omega = 0$  ، فإن معادلة (6.45) تؤول صورة قانون أوم العادية (  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  ) .

باستخدام التعبير الديناميكي لكثافة التيار الكهربائي  $\mathbf{J}$  ، نجد ان معادلة الموجة العامة (6.14) تصبح كما يلي:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{\mu_0 \sigma}{1 - i\omega\tau} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.46)$$

ويكون الحل التجريبي لهذه المعادلة على صورة الموجة المستوية التوافقية ، او

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathcal{K}z - \omega t)} \quad (6.47)$$

وكما في معادلة (6.26) ، يكون عددا مركبا ويحقق العلاقة التالية:

$$\mathcal{K}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{i\omega\mu_0\sigma}{1 - i\omega\tau} \quad (6.48)$$

في حالة الترددات المنخفضة ، تؤول معادلة (6.48) تقريبا الى الصورة التالية :

$$\mathcal{K}^2 \approx i\omega\mu_0\sigma \quad (6.49)$$

ويمكن التعبير عن  $\mathcal{K}$  بصورة عدد مركب مكونا من جزئين : حقيقي وتخيلي كما يلي:

$$\mathcal{K} \approx \sqrt{i\omega\sigma\mu_0} \approx (1 + i)\sqrt{\omega\sigma\mu_0/2} = k + i\alpha$$

حيث

$$k \approx \alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}} \quad (6.50)$$

وبالمثل ، يكون الجزء الحقيقي والتخيلي للعدد المركب  $\mathcal{N}$  متساويان ، او

$$n \approx \kappa \approx \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon_0}} \quad (6.51)$$

وتعرف المسافة التي تخترقها الموجة الكهرومغناطيسية في الوسط ، والتي عندها تهبط سعة هذه الموجة الى  $e^{-1}$  من قيمتها الابتدائية ( عند سطح الوسط) **بالعمق القشري** *skin depth* ، ويرمز لها بالرمز  $\delta$  ، رياضيا :

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu_0}} = \sqrt{\frac{\lambda_0}{c\pi\sigma\mu_0}} \quad (6.52)$$

حيث ،  $\lambda_0$  طول الموجة في الفراغ .

وعليه ، يمكن تحليل لماذا يكون الوسط الجيد التوصيل معتما ( غير شفاف ) إذ يرجع السبب الى القيمة العالية للموصلية التي تجعل معامل الإمتصاص كبيرا ( اي تكون النفاذية للوسط صغيرة جدا ) . وعليه ، يكون العمق القشري صغيرا . فمثلا ، مقدار موصلية مادة النحاس تساوي  $5.8 \times 10^7 \text{ ohm /m}$  للموجة الميكرونية ذات الطول  $1.0 \text{ mm}$  ، من معادلة (6.52) نجد ان العمق القشري يساوي  $10^{-4} \text{ mm}$ .

بالعودة الى صورة  $\mathcal{K}$  الدقيقة والمعطاة في المعادلة (6.48) . يكون الشكل المكافئ لهذه المعادلة بدلالة معامل الإنكسار المركب (المعرف في معادلة 6.29) كما يلي:

$$\mathcal{N}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\tau^{-1}} \quad (6.53)$$

حيث  $\omega_p$  التردد البلازمي *plasma frequency* في المعدن والذي يعرف بالعلاقة التالية:

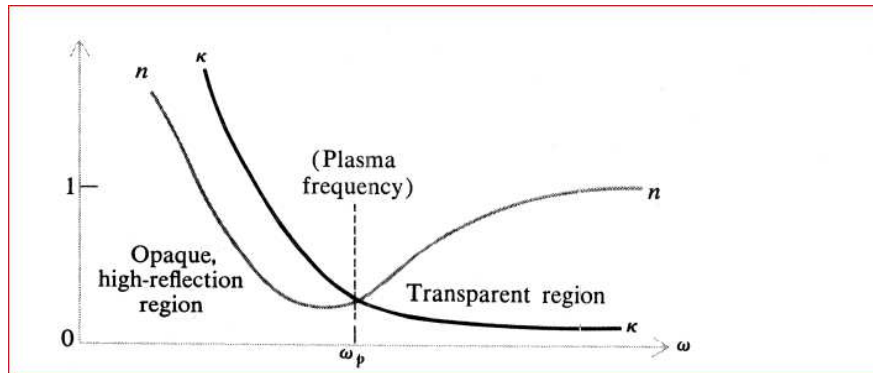
$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0\sigma c^2}{\tau}} \quad (6.54)$$

وبمساواة الحدود الحقيقية والتخيلية في معادلة (6.53) ، نجد التالي:

$$n^2 - \kappa^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \tau^{-2}} \quad (6.55)$$

$$2n\kappa = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \tau^{-2}} \left( \frac{1}{\omega\tau} \right) \quad (6.56)$$

وبحل هاتين المعادلتين ، نجد قيم الثوابت الضوئية  $n$  ،  $k$  . كما يجب ملاحظة ان هذا الحل يتم بطرق التحليل العددي *numerical analysis* ، نظرا لصعوبة الحل الجبري. كما يعطى هذا الحل بدلالة الثوابت :  $\omega, \tau, \omega_p$  للموجة الضوئية المنتشرة في هذا الوسط. على سبيل المثال ، تكون قيمة  $\tau$  في المعدن من رتبة  $10^{-13}$  *sec* في المنطقة تحت الحمراء من الطيف ، كما تكون الترددات البلازمية للمعادن حوالي  $10^{15}$  *sec*<sup>-1</sup> في المنطقة المرئية وبالقرب من المنطقة فوق البنفسجية من الطيف ( الشكل 6.4) .



شكل (6.4) معامل الانكسار والإنطفاء كدوال لتردد الموجة المنتشرة في وسط معدني.

نلاحظ من الشكل (6.4) ما يلي:



يكون معامل الانكسار  $n$  اقل من الواحد عبر المدى الواسع من التردد البلازمي ، بينما يكون معامل الإنطفاء  $k$  كبيرا للترددات المنخفضة ( او الموجات الطويلة ) . كما تتناقص قيمة هذا المعامل مع ازدياد قيمة التردد ، بحيث تصبح صغيرة عند التردد البلازمي ، و عليه ، يصبح الوسط المعدني شفافا *transparent* عند الترددات الأعلى من هذا التردد. وهذه النتيجة تتفق مع توقعات النظرية الكلاسيكية، التي تم اعتمادها لتفسير سلوك الشعاع الضوئي في الوسط المادي، في حالة المعادن القلوية *alkali metals* وبعض الموصلات مثل النحاس، الفضة ، والذهب. اما في حالة الأوساط المعدنية رديئة التوصيل وشبه الموصلة ، فإن كلا من الإلكترونات الحرة والمقيدة تساهم في تحديد سلوك الموجات الكهرومغناطيسية في تلك الأوساط . و عليه ، يكون معامل الانكسار المركب ، حسب النظرية الكلاسيكية ، كما يلي:

$$\mathcal{N}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\tau^{-1}} + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_j \left( \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right) \quad (6.57)$$

تبين هذه النتيجة ان النظرية الكمية *quantum theory* تعطي نفس العلاقة (6.57) ، اضافة الى قيم المعاملات المختلفة :  $\gamma_j, f_j$  . وبالرغم من صعوبة الحسابات النظرية ، وكذلك القياسات التجريبية ، الا ان البحوث لدراسة وتحليل سلوك الضوء في المواد شبه الموصلة تجري بشكل نشيط .

## (6.6) الإنعكاس والإمتصاص عند حدود وسط امتصاصي

### *Reflection and Refraction at the Boundary of Absorbing Medium*

نفرض ان موجة مستوية ما تسقط على سطح وسط ذي المعامل الانكسار المركب التالي

$$\mathcal{N} = n + i\kappa \quad (6.58)$$

و ان منجبة الإنتشار المركب للموجة المنكسرة عند هذا السطح يعطى كالتالي:

$$\mathcal{K} = \mathbf{k} + i\alpha \quad (6.59)$$

لتسهيل المعالجة الرياضية ، نفرض ان الموجة الساقطة تكون قادمة من خلال وسط مادي غير ممتص ، وان تكون دوال الموجات الساقطة والمنعكسة والمنكسرة في هذه الأوساط متناسبة مع الدوال الأسية التالية :

$$incident\ wave : e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$reflected\ wave : e^{i(\mathbf{k}'_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$refracted\ wave : e^{i(\mathcal{K} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = e^{-\alpha \cdot \mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

بتطبيق الشروط الحدودية التي تمت الإشارة إليها في البند (2.6) ، والمتعلقة بحالة الإنعكاس والإنكسار في الوسط العازل ، نحصل على ما يلي

$$\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}'_0 \cdot \mathbf{r} \quad (\text{at boundary}) \quad (6.60)$$

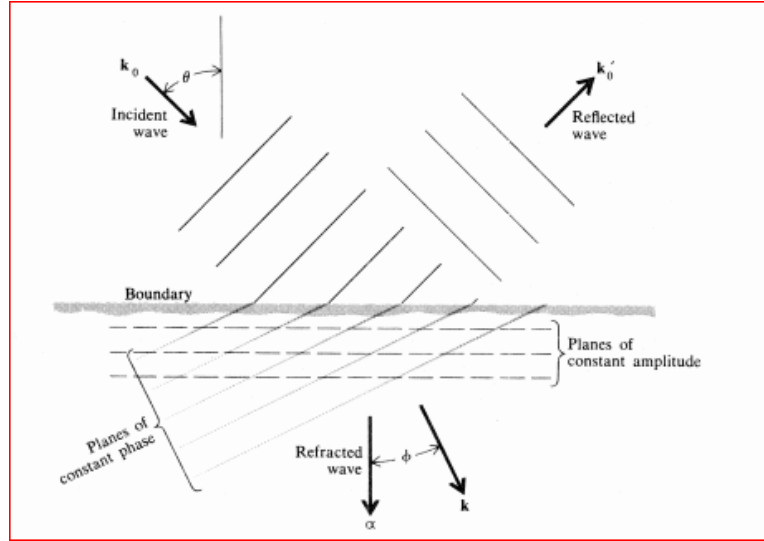
$$\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} = \mathcal{N} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{k} + i\alpha) \cdot \mathbf{r} \quad (\text{at boundary}) \quad (6.61)$$

حيث تعطي العلاقة (6.60) قانون الانعكاس عند السطح الحدودي ، بينما تعطي العلاقة (6.61) ، بعد مساواة الأجزاء الحقيقية والتخيلية في طرفي المعادلة ، التالي:

$$\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (6.62)$$

$$0 = \alpha \cdot \mathbf{r} \quad (6.63)$$

و تبين هذه العلاقة ان  $\mathbf{k}$  ،  $\alpha$  تقعان في اتجاهات مختلفة . وفي هذه الحالة ، تسمى الموجة بالموجة غير المتجانسة *nonhomogeneous wave* ، بينما العلاقة (6.63) تتضمن ان  $\alpha$  التي تحدد اتجاه مستويات السعة الثابتة *planes of constant amplitudes* ، تكون متعامدة مع السطح الفاصل دائما . من ناحية ثانية ، يتم تحديد المستويات ذات الطور الثابت *planes of constant phase* بالمتجه  $\mathbf{k}$  ، وتكون هذه المستويات عند اي اتجاه في الوسط ( الشكل 6.5).



شكل (6.5) الجزء الحقيقي والتخيلي لمتجه الموجة في وسط ممتصفي حالة السقوط المائل.

نلاحظ من هذا الشكل انتقال الموجات في اتجاه  $\mathbf{k}$  بسعات متناقصة اسيا مع الإبتعاد عن السطح الفاصل .

على فرض ان  $\theta, \phi$  زاويتي السقوط والانكسار للموجة عند السطح الفاصل على الترتيب ، لذلك تؤول معادلة (6.62) الى الصورة التالية

$$k_0 \sin \theta = k \sin \phi \quad (6.64)$$

يمكن باستخدام هذه المعادلة إيجاد زاوية انكسار الموجة عندما تعطى قيمة زاوية السقوط واذا علمنا متجه الانتشار  $k$ ، مع العلم ان قيمة هذا المتجه غير ثابتة للموجة غير المتجانسة وهي دالة للزاوية  $\phi$  التي تنحصر بين المتجهين  $\alpha, k$  (الشكل 6.5). لإيجاد العلاقة المطلوبة، نستخدم معادلة الموجة بعد تحويلها بدلالة المعاملات المركبة، وتكون كالتالي:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\mathcal{N}^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (6.65)$$

في حالة الموجات التوافقية، تكون الصيغة الرياضية للمؤثرات على معادلة الموجة التوافقية كما يلي:

$$\nabla \rightarrow i\mathcal{K} ; \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$$

$$\mathcal{K} \cdot \mathcal{K} = \frac{\mathcal{N}^2 \omega^2}{c^2} = \mathcal{N}^2 k_0^2 \quad (6.66)$$

حيث  $k_0 = \omega/c$ . وبدلالة الأجزاء الحقيقية والتخيلية، نجد ان معادلة (6.66) تؤول الى التالي:

$$(\mathbf{k} + i\alpha) \cdot (\mathbf{k} + i\alpha) = (n + i\kappa)^2 k_0^2 \quad (6.67)$$

بمساواة الحدود الحقيقية في طرفي معادلة (6.67)، وكذلك الحدود التخيلية، نحصل على التالي

$$k^2 - \alpha^2 = (n^2 - \kappa^2) k_0^2 \quad (6.68)$$

$$\mathbf{k} \cdot \alpha = k\alpha \cos \phi = n\kappa k_0^2 \quad (6.69)$$

وبإجراء المزيد من العمليات الجبرية، نحصل على:

$$k \cos \phi + i\alpha = k_0 \sqrt{\mathcal{N}^2 - \sin^2 \theta} \quad (6.70)$$

في حالة السقوط العمودي،  $\theta = 0$ ، تصبح هذه المعادلة بصورة  $k + i\alpha = k_0 \mathcal{N}$ ، وهذه نفس النتيجة التي تم الحصول عليها سابقا في حالة الموجات المتجانسة.

اما الصورة الرياضية لقانون الانكسار بدلالة معاملات الانكسار المركبة، تكون كما يلي:

$$\mathcal{N} = \frac{\sin \theta}{\sin \phi} \quad (6.71)$$

حيث ،  $\phi$  عدد مركب ، وتستخدم هذه الزاوية لتبسيط العلاقات السابقة والخاصة بالانعكاس والانكسار للموجة المنتشرة في الوسط الممتص. باستخدام قانون النسب المثلثية وتربيع معادلة (6.71) ، يمكن إيجاد جيب التمام لهذه الزاوية والذي يعطى كما يلي:

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\mathcal{N}^2}} \quad (6.72)$$

وعليه ، يمكن استخدام معادلتى (6.70) ، (6.72) للحصول على صيغة اخرى لمعامل الانكسار المركب وتكون كما يلي:

$$\mathcal{N} = \frac{k \cos \phi + i\alpha}{k_0 \cos \phi} \quad (6.73)$$

### ▪ الإنعاسية Reflectance

باستخدام معادلات ماكسويل في النظرية الكهرومغناطيسية ، نجد ان العلاقات الرياضية بين سعات المجال الكهربى والمغناطيسى للموجة الساقطة ، المنعكسة ، والمنكسرة في الوسيطين تكون كما يلي:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \omega} \mathbf{k}_0 \times \mathbf{E} \quad (\text{incident}) \quad (6.74)$$

$$\mathbf{E}', \mathbf{H}' = \frac{1}{\mu_0 \omega} \mathbf{k}_0' \times \mathbf{E}' \quad (\text{reflected}) \quad (6.75)$$

$$\mathbf{E}'', \mathbf{H}'' = \frac{1}{\mu_0 \omega} \mathcal{N} \times \mathbf{E}'' = \frac{1}{\mu_0 \omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}'' + i\alpha \times \mathbf{E}'') \quad (\text{refracted}) \quad (6.76)$$

### ▪ معامل انعكاس الموجة TE

لإشتقاق الصيغة الرياضية لمعامل انعكاس الموجة في حالة الإستقطاب TE، نستخدم الشروط الحدودية للمجال الكهربى والمغناطيسى : تكون المركبات المماسية *tangential components* لهذه المجالات متصلة عند السطح الفاصل بين الوسيطين ، او

$$E + E' = E'' \quad (6.77)$$

$$-H \cos \theta + H' \cos \theta = H''_{\text{tangential}} \quad (6.78)$$

حيث يعطى استخدام المعادلات (6.74--6.76) مع معادلة (6.78) ما يلي:

$$\begin{aligned} -k_0 E \cos \theta + k_0 E' \cos \theta &= -(kE'' \cos \phi + i\alpha E'') \\ &= -\mathcal{N} k_0 E'' \cos \phi \end{aligned} \quad (6.79)$$

حيث ، استخدمنا معادلة (6.73) للحصول على معامل الإنعكاس المركب  $\mathcal{N}$  في الخطوة الأخيرة.

اذن ، بحذف  $E''$  من المعادلات (6.77, 6.79) نجد ان

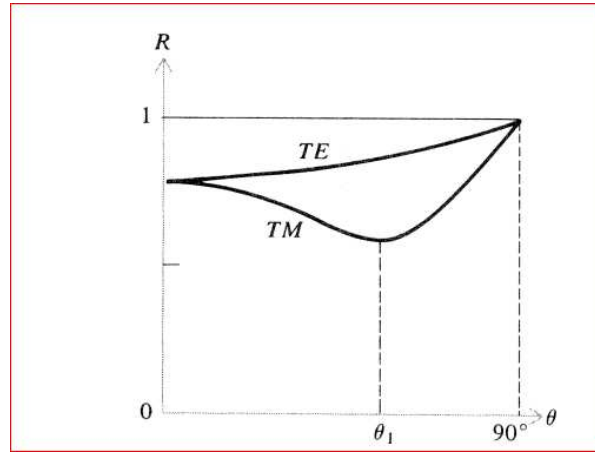
$$r_s = \frac{\cos \theta - \mathcal{N} \cos \phi}{\cos \theta + \mathcal{N} \cos \phi} \quad (TE \text{ polarization}) \quad (6.80)$$

تعطي هذه المعادلة النسبة بين سعة الموجة المنعكسة الى سعة الموجة الساقطة (معامل الإنعكاس) ، وهي مشابهة للمعادلة (2.54) في حالة الإنعكاس في الأوساط العازلة *dielectric media* ، مع الأخذ بعين الاعتبار ان المعاملات  $\mathcal{N}, \phi$  اعدادا مركبة .

وبنفس الطريقة الرياضية السابقة، نجد ان معامل الإنعكاس في حالة الموجة *TM* يكون كما يلي:

$$r_p = \frac{-\mathcal{N} \cos \theta + \cos \phi}{\mathcal{N} \cos \theta + \cos \phi} \quad (TM \text{ polarization}) \quad (6.81)$$

كما يمكن توضيح السلوك العام للإنعكاسية بيانيا ، في حالتني الإستقطاب:  $R_s, R_p$  ، كدالة لزاوية السقوط  $\theta$  على سطح معدني مثالي كما في الشكل (6.6) .



شكل (6.6) الإنعكاسية كدالة لزاوية السقوط على سطح معدني مثالي.

من الشكل (6.6) ، نلاحظ التالي:

تزداد الإنعكاسية في حالة الإستقطاب TE مع ازدياد قيمة  $\theta$  ، وتصل الى الوحدة عند السقوط المماسي للسطح ( القريب جدا من هذا السطح ) *Grazing incidence* . ومن ناحية اخرى ، في حالة الإستقطاب TM ، نجد ان لمنحنى الإنعكاسية قيمة  $\theta_i$  غري عند زاوية معينة ، وتعرف بالزاوية الرئيسية للسقوط وتقابل زاوية بريسوتر في حالة الأوساط العازلة .

اما في حالة السقوط العمودي ( $\theta = 0$ ) ، تصبح المعادلات (6.80 - 6.81) كالتالي:

$$r_s = r_p = \frac{1 - \mathcal{N}}{1 + \mathcal{N}} = \frac{1 - n - i\kappa}{1 + n + i\kappa} \quad (6.82)$$

وتكون الإنعكاسية كما يلي:

$$R = \left| \frac{1 - \mathcal{N}}{1 + \mathcal{N}} \right|^2 = \frac{(1 - n)^2 + \kappa^2}{(1 + n)^2 + \kappa^2} \quad (6.83)$$

ونلاحظ ان المعادلة الأخيرة تتطابق مع النتيجة المعطاة في بند (2.7) في حالة الأوساط العازلة ، حيث تقترب قيمة  $k$  من الصفر ، ويصبح معامل الإنكسار عددا حقيقيا . ومن ناحية اخرى ، يكون مقدار معامل الإنطفاء كبيرا ، ويحدث ذلك عند القيم العالية للإنعكاسية والتي تقترب من الواحد ، لإن قيمة  $k$  تصبح مالانهاية . في البند السابق ، وجدنا ان قيم  $n, k$  تقترب من المقدار  $\sqrt{\sigma/2\epsilon_0\omega}$  في الحالة الغائية *limit case* للترددات المنخفضة ( معادلة 6.51).

الآن ، بالرجوع الى معادلة (6.83) ، نجد ان الصورة التقريبية للإنعكاسية تكون كما يلي:

$$R \approx 1 - \frac{2}{n} \approx 1 - \sqrt{\frac{8\omega\epsilon_0}{\sigma}} \quad (6.84)$$

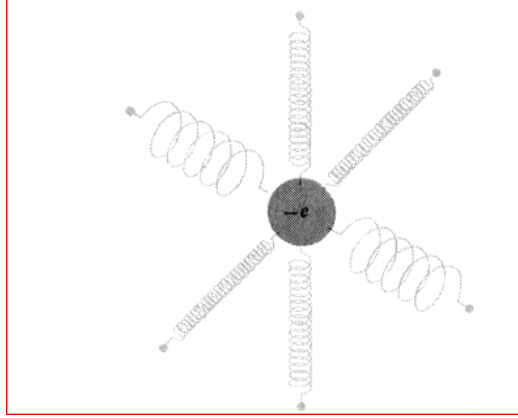
وتعرف هذه المعادلة بقانون **هاجن- روبنز Hagen- Robens formula** ، ويمكن البرهنة على صحة هذا القانون بالتجربة العملية ، حيث يتم استخدام سقوط الأشعة تحت الحمراء على معادن مختلفة وتسجيل الإنعكاسية لكل حالة ، ويلاحظ من هذه المعادلة ان الكمية  $(1 - R^2)$  تتناسب طرديا مع تردد الموجة الساقطة على المعدن ( او عكسيا مع طول موجة الشعاع الساقط). كما تكون جميع المعادن ذات الموصلية العالية ( النحاس ، الذهب ، الفضة ... ) عواكس ممتازة في منطقة الأشعة تحت الحمراء ( $\lambda > \{1\mu \rightarrow 2\mu\}$ ) ، وتصبح الإنعكاسية قريبة من الواحد في المنطقة البعيدة من الأشعة تحت الحمراء ( $\lambda > 20\mu$ ) .

### (6.7) انتشار الضوء في البلورات *Propagation of Light in Crystals*

عند دراسة الخواص الضوئية للبلورات، تكون المظاهر الأساسية والمميزة للحالة البلورية هي ان هذه البلورات غير متماثلة المناحي كهربيا *electrically anisotropic* ، اي ان الإستقطاب الناتج بفعل المجال الكهربائي الخارجي والمسلسل على هذه البلورات يتغير بطريقة تعتمد على اتجاه هذا المجال بالنسبة لشبكة البلورة *Lattice* . ونتيجة لذلك ، تكون سرعة انتشار الموجة الضوئية في البلورة دالة لإتجاه الإستقطاب الضوئي واتجاه الإنتشار . وهذا يؤدي الى وجود قيمتين مختلفتين لسرعة طور هذه الموجة عند اعتبار اي اتجاه معطى لإنتشارها، وتكون هاتان القيمتان مرافقة للإستقطاب العمودي المتبادل لموجات الضوء. وفي هذه الحالة ، يقال ان البلورة تملك خاصية الإنكسار المزدوج *double refraction* . عمليا ، تملك معظم البلورات هذه الخاصية ويتوقف ذلك على تماثل البلورة *crystal symmetry* ، بينما نجد ان البلورات ذات

الشكل التكميبي *cubic crystal* ، مثل بلورة كلوريد الصوديوم *NaCl* ، لا تملك خاصية الإنكسار المزدوج ، وتكون متماثلة المناحي ضوئيا .

يوضح الشكل (6.7) الإستقطاب اللاتماثلي للبلورة ، حيث نتخيل ان الإلكترونات المقيدة في ذرات البلورة كما لو كانت مربوطة بزنبركات مرنة *elastic springs* ، وتكون مرونة هذه الزنبركات مختلفة بحسب إتجاهات ازاحة هذه الإلكترونات عن موقع الإتزان في شبكة البلورة .



شكل (6.7) نموذج يوضح الربط غير التماثل للإلكترون المقيد في البلورة.

وعليه ، تعتمد ازاحة هذه الإلكترونات على **اتجاه** المجال الكهربائي الخارجي المسلط على البلورة وكذلك على **مقداره**، وهذا أيضا ، ينسحب على الإستقطاب الناتج **P** .

كما تكون العلاقة بين **E, P** بصورة ما يعرف رياضيا **بالممتد Tensor** ، وتكون كما يلي:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (6.85)$$

ويمكن اعادة كتابة معادلة (6.85) على الصورة التالية:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (6.86)$$

حيث ، يعطى ممتد القابلية (التأثيرية) الكهربائية *susceptibilities* كالتالي:

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \quad (6.87)$$

كما يكون متجه الإزاحة **D** الكهربائية على الصورة التالية :

وحيث  $\mathbf{D} = \epsilon_0(\mathbf{1} + \chi)\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E}$  ، حيث  $\mathbf{1}$  = مصفوفة الوحدة ، او  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  . وكذلك ، نجد ان

$$\epsilon = \epsilon_0(\mathbf{1} + \chi) \quad (6.88)$$

حيث  $\epsilon$  يسمى ممتد ثابت العازل *dielectric tensor* .

اما في حالة البلورات غير الممتصة *nonabsorbing crystals* ، يكون ممتد القابلية الكهربائية على صورة مصفوفة قطرية *diagonal matrix* ، اي يوجد في البلورة ثلاثة محاور تسمى المحاور الرئيسية *principal axes* ، ويعبر عن ذلك كالتالي:

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \quad (6.89)$$

وتسمى عناصر القطر في معادلة (6.89) *بالقابلية الرئيسية* ، ويمكن التعبير عن ثوابت العازل الرئيسية لمادة البلورة بدلالة هذه القابلية كما يلي:  $\kappa_{11} = 1 + \chi_{11}$  ،  $\kappa_{22} = 1 + \chi_{22}$  ،  $\kappa_{33} = 1 + \chi_{33}$  .

على ضوء معادلة (6.86) ، يمكن اعادة كتابة معادلة الموجة (6.14) بالصورة التالية :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \chi \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (6.90)$$

ويتبع هذا ، ان هذه البلورة تستطيع تمرير موجات مستوية احادية اللون على الصورة الرياضية التالية:  $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$  ، بشرط ان يحقق متجه الانتشار  $\mathbf{k}$  المعادلة التالية:

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi \mathbf{E} \quad (6.91)$$

باستخدام قواعد الضرب الثلاثي للمتجهات و فرز المركبات في اتجاه كل محور احداثي ، يمكن كتابة معادلة (6.91) بدلالة مكوناتها الثلاثة كالتالي :

$$\begin{aligned} \left(-k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_x + k_x k_y E_y + k_x k_z E_z &= -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{11} E_x \\ k_y k_x E_x + \left(-k_x^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_y + k_y k_z E_z &= -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{22} E_y \\ k_z k_x E_x + k_z k_y E_y + \left(-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_z &= -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{33} E_z \end{aligned} \quad (6.92)$$



ولتوضيح المعنى الفيزيائي للمعادلة (6.92) ، نتناول الحالة الخاصة التالية:

نفرض ان موجة توافقية تنتشر في اتجاه احد المحاور الرئيسية للبلورة ( محور  $x$  ) ، وعليه ، يكون

، بالتعويض في معادلة (6.92) ، نحصل على ما يلي:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2} E_x &= -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{11} E_x \\ \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_y &= -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{22} E_y \\ \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_z &= -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{33} E_z \end{aligned} \quad (6.93)$$

نلاحظ ان المعادلة الأولى في معادلة (6.93) تتضمن ان  $E_x = 0$  لأن اي من:  $\omega$  او  $\chi_{11}$  لا يساوي صفرا ، وهذا يعني ان المجال الكهربائي يكون مستعرضا في اتجاه محور  $x$  ( اتجاه الإنتشار ) . لنعبر المعادلة الثانية في (6.93) ، اذا كانت  $E_y \neq 0$  ، فإن

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi_{22}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{K_{22}} \quad (6.94)$$

بينما المعادلة الثالثة المكونة للمعادلة (6.93) تتضمن انه اذا كان  $E_z \neq 0$  ، فإن

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi_{33}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{K_{33}} \quad (6.95)$$

حيث  $\omega/k$  = سرعة طور الموجة . من هنا نجد امكانية تواجد قيمتان لهذه السرعة ، تحديدا ، القيمة الأولى :  $c/k_{22}$  عندما يكون متجه المجال الكهربائي في اتجاه محور  $y$  ، والقيمة الثانية لهذه السرعة :  $c/k_{33}$  عندما يكون هذا المتجه يشير الى محور  $z$  .

وعموما ، يمكن برهان ان لأي اتجاه تنتشر فيه الموجة في البلورة ، هناك قيمتان لسرعة الطور ، ويمكن معالجة ذلك رياضيا كالتالي :

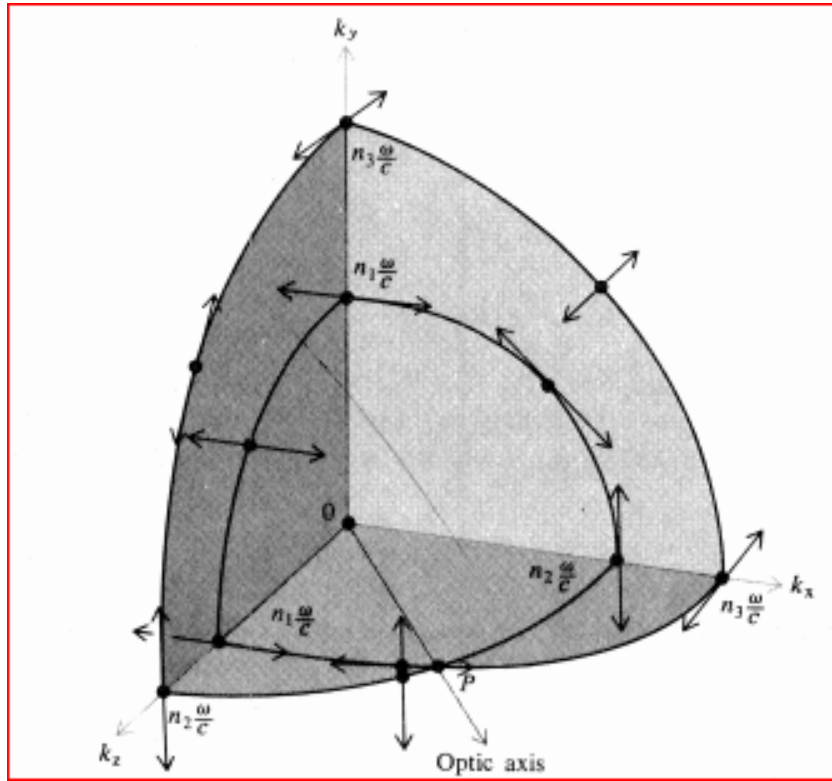
نفرض ان معاملات الإنكسار الرئيسية للبلورة هي:  $n_1, n_2, n_3$  ، حيث نعبر عنها بدلالة القابلية الكهربائية الرئيسية ( او ثوابت العازل الرئيسية ) كما يلي:

$$\begin{aligned} n_1 &= \sqrt{1 + \chi_{11}} = \sqrt{K_{11}} \\ n_2 &= \sqrt{1 + \chi_{22}} = \sqrt{K_{22}} \\ n_3 &= \sqrt{1 + \chi_{33}} = \sqrt{K_{33}} \end{aligned} \quad (6.96)$$

يوجد حلا معتبرا لمعادلة (6.92) ، بالنسبة لمكونات المجال الكهربائي ، اذا كان محدد المعاملات يساوي الصفر ، ولإيجاد هذا الحل ، نستخدم معادلة (6.96) لنحصل على التالي:

$$\begin{vmatrix} (n_1\omega/c)^2 - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & (n_2\omega/c)^2 - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & (n_3\omega/c)^2 - k_x^2 - k_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.97)$$

هندسيا ، يعطي حل هذه المعادلة (6.97) سطحا ثلاثي الأبعاد في فراغ  $\mathbf{k}$  ، ويعرف بسطح متجه الموجة-wave *vector surface* ، ويمثل كما في الشكل (6.9).



شكل (6.9) مخطط سطح متجه الموجة.

ولفهم كيفية بناء هذا السطح ، نعتبر اي مستوى من المستويات الإحداثية (مستوى  $xy$ ) ، حيث يكون  $k_z = 0$  . وعليه ، يكون مقدار هذا المحدد (6.97) كما يلي:

$$\left[ \left( \frac{n_3\omega}{c} \right)^2 - k_x^2 - k_y^2 \right] \left\{ \left[ \left( \frac{n_1\omega}{c} \right)^2 - k_y^2 \right] \left[ \left( \frac{n_2\omega}{c} \right)^2 - k_x^2 \right] - k_x^2 k_y^2 \right\} = 0 \quad (6.98)$$

تتحقق معادلة (6.98) اذا كان احد عوامل الضرب مساويا للصفر ، اي

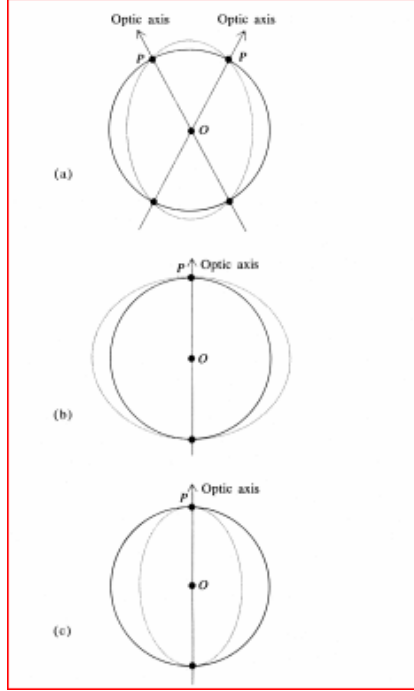
$$k_x^2 + k_y^2 = \left( \frac{n_3 \omega}{c} \right)^2 \quad (6.99)$$

او

$$\frac{k_x^2}{(n_2 \omega / c)^2} + \frac{k_y^2}{(n_1 \omega / c)^2} = 1 \quad (6.100)$$

نلاحظ ان معادلة (6.99) تمثل معادلة دائرة ، بينما تمثل معادلة (6.100) معادلة قطع بيضاوي *ellipse* . وبالمثل ، يمكن الحصول على معادلات مشابهة لهذه المعادلات للمستويات :  $xz, yz$  . من الشكل (6.8) نجد ان سطح  $\mathbf{k}$  يتقاطع مع المستويات الإحداثية مشكلا دائرة او قطع بيضاوي ، اي يكون سطح  $\mathbf{k}$  الكامل مزدوجا ، بمعنى انه يتألف من صفيحة داخلية واخرى خارجية ، مما يدل على وجود قيمتين للعدد الموجي  $k$  في اتجاه إنتشار الموجة في البلورة . وعليه ، توجد قيمتان لسرعة طور انتشار هذه الموجة ، وهذه القيم تقابل اتجاهين متبادلين متعامدين *mutual orthogonally polarized directions* من حالة الإستقطاب .

وكما هو معلوم ، يمكن تحليل الموجة الضوئية المستقطبة في اتجاه ما الى موجتين مستقلتين ومستقطبتين بشكل متعامد. وتكون طبيعة سطح  $\mathbf{k}$  ، بحيث ان الصفيحتين ( الداخلية والخارجية ) تتلامسين عند نقطة معينة مثل  $P$  (كما في الشكل 6.8) ، وهذه النقطة تعرف الإتجاه الذي تكون فيه قيمتي  $k$  متساوية ، ويسمى هذا الإتجاه بالمحور البصري للبلورة *Optic Axis* ، كما ان سرعة طور الموجات المستقطبة عموديا تتساوى في هذا الإتجاه ( اتجاه المحور البصري). يوضح الشكل (6.8) ، والشكل (6.9a) الحالة العامة ، حيث تكون المعاملات الرئيسية  $n_3, n_2, n_1$  مختلفة القيم ، وهنا يعطي التقاطع بين هاتين الصفيحتين محورين بصريين ، وعندئذ تكون البلورة ثنائية المحور *biaxial crystal* . في كثير من البلورات ، نجد ان اثنين من هذه المعاملات الرئيسية تكون متساوية القيمة، وحينئذ تسمى هذه البلورة احادية المحور *uniaxial* ، ويكون سطح  $\mathbf{k}$  مؤلفا من كرة ومجسم بيضاوي ناتجا عن الدوران حول المحور البصري ( الشكل 6.9b,c ) .



شكل (6.9) تقاطع سطح متجه الموجة في مستوى  $xz$ : (a) بلورة ثنائية المحور (b) بلورة احادية المحور موجبة (c) بلورة احادية المحور سالبة .

اما اذا كانت جميع قيم هذه المعاملات متساوية ، فإن سطح  $k$  يؤول الى سطح كروي واحد ، و عندها لا تملك هذه البلورة خاصية الإنكسار المزدوج ، اي تكون **متماثلة المناحي** □ و **ونيا optically isotropic** .

وحيث ان المعاملات الرئيسية ترتبط مع ممتد القابلية الكهربائية ( كما في معادلة 6.96 ) ، فيمكن تصنيف البلورات وفقا لهذا الممتد كما يلي:

<i>Isotropic</i> cubic	$\chi = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$	$\chi_{11} = \chi_{22} = \chi_{33} = a$ $n = \sqrt{1 + a}$
<i>Uniaxial</i> trigonal tetragonal hexagonal	$\chi = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$	$\chi_{11} = \chi_{22} = a, \chi_{33} = b$ $n_o = \sqrt{1 + a}$ $n_e = \sqrt{1 + b}$
<i>Biaxial</i> triclinic monoclinic orthorhombic	$\chi = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$	$\chi_{11} = a \quad \chi_{22} = b \quad \chi_{33} = c$ $n_1 = \sqrt{1 + a}$ $n_2 = \sqrt{1 + b}$ $n_3 = \sqrt{1 + c}$

جدول (6.1) انواع البلورات وفقا لممتد القابلية الكهربائية.

في البلورة الأحادية المحور والتي يكون لها معامل انكسار مقابلا لعنصرين متساويين في الممتد ،  $\chi_{11} = \chi_{22}$  ، يسمى هذا المعامل بمعامل الإنكسار العادي *ordinary index* ( $n_0$ ) ، بينما يسمى المعامل المقابل للقيمة الممتد  $\chi_{33}$  بمعامل الإنكسار غير الإعتيادي *extraordinary index* ( $n_E$ ) . كما تسمى البلورة الأحادية المحور بالبلورة الموجبة *positive crystal* عندما يكون  $n_0 < n_E$  وبالبلورة السالبة *negative crystal* اذا كان  $n_0 > n_E$  . يعطي الجدول (6.2) قيما لمعاملات الإنكسار في بعض البلورات .

OPTICALLY ISOTROPIC (CUBIC) CRYSTALS			
	$n$		
Sodium chloride	1.544		
Diamond	2.417		
Fluorite	1.392		
UNIAXIAL POSITIVE CRYSTALS			
	$n_0$	$n_E$	
Ice	1.309	1.310	
Quartz	1.544	1.553	
Zircon	1.923	1.968	
Rutile	2.616	2.903	
UNIAXIAL NEGATIVE CRYSTALS			
	$n_0$	$n_E$	
Beryl	1.598	1.590	
Sodium nitrate	1.587	1.336	
Calcite	1.658	1.486	
Tourmaline	1.669	1.638	
BIAXIAL CRYSTALS			
	$n_1$	$n_2$	$n_3$
Gypsum	1.520	1.523	1.530
Feldspar	1.522	1.526	1.530
Mica	1.552	1.582	1.588
Topaz	1.619	1.620	1.627

جدول (6.2) قيم معاملات الإنكسار في البلورات المختلفة.

### ▪ سطح سرعة الطور *phase – velocity surface*

يمكن كتابة العلاقة بين متجه العدد الموجي ومتجه سرعة الطور بالصورة الإتجاهية التالية:

$$\mathbf{k} = \mathbf{v} \frac{\omega}{v^2} \quad (6.101)$$

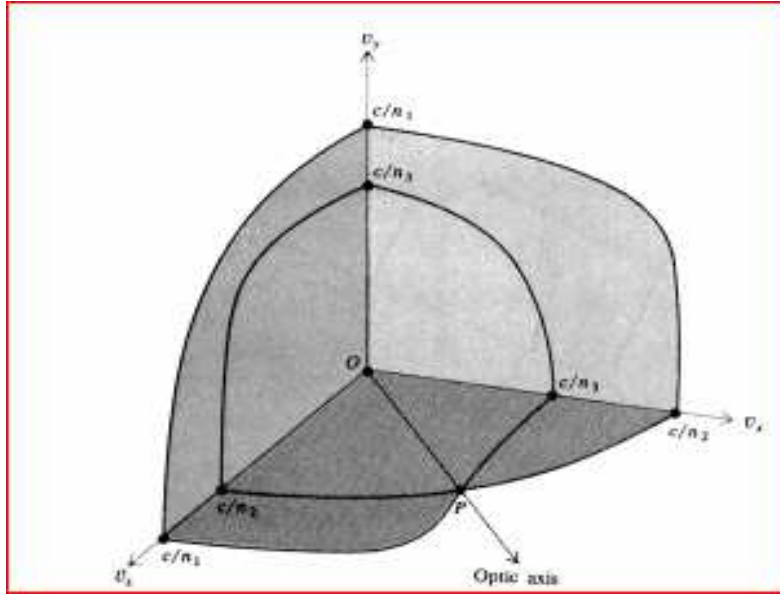
و تكون مكونات هذه المعادلة الإتجاهية كالتالي

$$k_x = v_x \frac{\omega}{v^2} \quad k_y = v_y \frac{\omega}{v^2} \quad k_z = v_z \frac{\omega}{v^2} \quad (6.102)$$

بالتعويض في معادلة سطح  $k$  (معادلة 6.97) ، نحصل على المحدد التالي:

$$\begin{vmatrix} n_1^2 v^4 / c^2 - v_y^2 - v_z^2 & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y v_x & n_2^2 v^4 / c^2 - v_x^2 - v_z^2 & v_y v_z \\ v_z v_x & v_z v_y & n_3^2 v^4 / c^2 - v_x^2 - v_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.103)$$

بعد اختزال  $\omega^2$  وبالقسمة على  $v^4$  ، نحصل على معادلات تمثل سطحا ثلاثي الأبعاد الذي يعرف بمقلوب سطح  $k$  ، ويسمى هذا السطح **بسطح سرعة الطور** ، وهو عبارة عن سطح مزدوج الصفائح *sheets* ويعطى قيمتين لسرعة طور الموجة عند اي اتجاه تنتشر فيه الموجة داخل البلورة ( الشكل 6.10) .



شكل (6.10) سطح سرعة الطور .

ويكون تقاطع هذا السطح مع مستويات الإحداثيات مؤلفا من دوائر و اشكال بيضاوية من الدرجة الرابعة . على سبيل المثال ، يكون في المستوى  $xy$  معادلتان تمثلان هذا التقاطع وهما

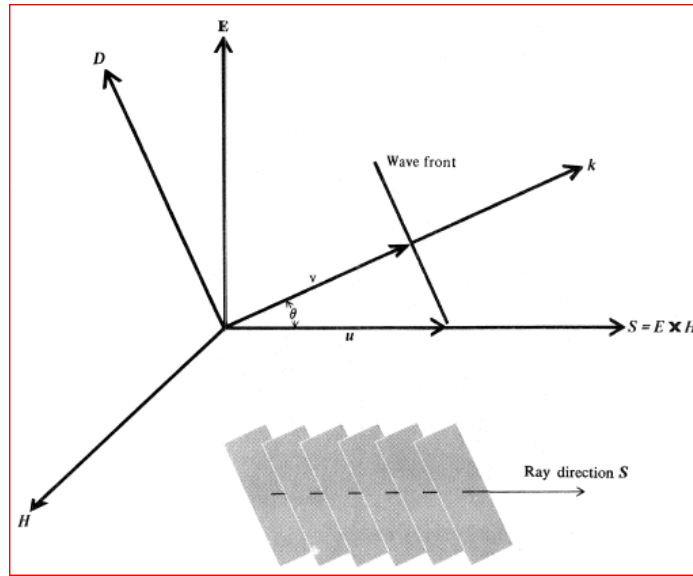
$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \frac{c^2}{n_3^2} \quad (6.104)$$

$$\frac{v_x^2}{n_2^2} + \frac{v_y^2}{n_1^2} = \frac{v^4}{c^2} \quad (6.105)$$

وبالمثل ، يوجد معادلات مشابهة في باقي المستويات الأحداثية الأخرى.

### ▪ متجه بوينتج وسرعة الشعاع *The Poynting Vector and Ray Velocity*

في حالة انتشار موجة الضوء في البلورات ، يحدد متجه انتشار هذه الموجات  $\mathbf{k}$  مستويات الطور الثابت ، إلا ان الإتجاه الفعلي لسريان الطاقة ( $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ ) لا يكون في نفس اتجاه  $\mathbf{k}$  . ويعود سبب ذلك الى عدم تماثل المناحي في البلورة والذي يجعل كلا من  $\mathbf{E}$  ,  $\mathbf{k}$  غير متعامدة ( كما يلاحظ في معادلة 6.91). من ناحية اخرى ، يكون  $\mathbf{H}$  متعامدا مع كلا من  $\mathbf{E}$  ,  $\mathbf{k}$  ، وذلك بسبب العلاقة التي تربط بين هذه المتجهات :  $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mu_0 \omega \mathbf{H}$  والتي تحقق صحة معادلة ماكسويل الأولى. يمكن توضيح ما سبق في الشكل (6.11) ، حيث نلاحظ من هذا الشكل ان المتجهات :  $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  تكون كلها متعامدة مع  $\mathbf{H}$  ، اضافة الى تعامد  $\mathbf{S}$  مع  $\mathbf{E}$  .



شكل (6.11) العلاقة بين متجهات المجالات في الموجة مع  $\mathbf{S}, \mathbf{k}$ .

لنعتبر ان شعاعا رفيعا *narrow* من الضوء ينتشر في بلورة ما ، بحيث تكون مستويات ثابت الطور متعامدة مع  $\mathbf{k}$  ولكنها تتحرك على طول *along* اتجاه الشعاع  $\mathbf{S}$  . وعليه ، تكون هذه المستويات مائلة بالنسبة للإتجاه الحركي ( الشكل 6.11)

. ولنفرض ان  $\theta =$  الزاوية المحصورة بين  $\mathbf{S}, \mathbf{k}$ . ايضا، نفرض ان هذه المستويات تتحرك بسرعة  $u$  (سرعة الشعاع ray velocity) على طول اتجاه الشعاع. وعليه، يكون مقدار  $u$  كما يلي

$$u = \frac{v}{\cos \theta} \quad (6.106)$$

حيث  $v$  سرعة الطور في اتجاه  $\mathbf{k}$ . من هذه المعادلة، نلاحظ ان سرعة الشعاع تكون اكبر من سرعة الطور، ما عدا عند  $\theta = 0$  حيث تتساوى السرعتان. ويحدث ذلك عندما يكون اتجاه الانتشار في اتجاه احد المحاور الرئيسية للبلورة. ويكون كلا من  $\mathbf{S}, \mathbf{k}$  في نفس الإتجاه.

#### ▪ سطح سرعة الشعاع the ray-velocity surface

يعطي هذا السطح مقدار سرعة الشعاع في اتجاه مفترض لهذا الشعاع، ولإيجاد معادلة هذا السطح، نستخدم معادلة الموجة (6.91) بدلالة متجه الإزاحة  $\mathbf{D}$  :  $\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi)\mathbf{E}$ . في حالة الموجات المستوية التوافقية، نجد ان

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\frac{\omega^2}{c^2 \epsilon_0} \mathbf{D}$$

و تبين هذه المعادلة ان  $\mathbf{D}$  تكون متعامدة مع  $\mathbf{k}$ . باستخدام قاعدة الضرب الثلاثي للمتجهات، نجد ان

$$\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2 \epsilon_0} \mathbf{D}$$

وبأخذ الضرب العددي مع  $\mathbf{D}$  لكل من طرفي هذه المعادلة، وحيث  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0$ ، نحصل على التالي:

$$k^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{\omega^2}{c^2 \epsilon_0} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}$$

حيث  $v = \omega/k$ ، فإن هذه المعادلة تؤول الى التالي

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = ED \cos \theta = \frac{v^2}{c^2 \epsilon_0} D^2$$

عندما تكون المحاور الإحداثية هي المحاور الرئيسية للبلورة، فإن مركبات كلا من  $\mathbf{E}, \mathbf{D}$  ترتبط معا بالعلاقات التالية

$$\epsilon_0 E_x = \frac{D_x}{\epsilon_{11}} = \frac{D_x}{n_1^2}$$



وكذلك تكون باقي المركبات المتناظرة في اتجاه محوري  $y, z$ . ويتبع ذلك ان تصبح المعادلة التي تعطي مقدار **E. D** مكافئة لثلاث معادلات عددية بالصورة التالية

$$\begin{aligned} D_x \left( \frac{c^2}{n_1^2} - u_y^2 - u_z^2 \right) + D_y u_x u_y + D_z u_x u_z &= 0 \\ D_x u_y u_x + D_y \left( \frac{c^2}{n_2^2} - u_x^2 - u_z^2 \right) + D_z u_y u_z &= 0 \\ D_x u_z u_x + D_y u_y u_z + D_z \left( \frac{c^2}{n_3^2} - u_x^2 - u_y^2 \right) &= 0 \end{aligned}$$

وللحصول على حل مقبول لهذه المركبات ، يجب تلاشي محدد معاملاتها ، اي

$$\begin{vmatrix} c^2/n_1^2 - u_y^2 - u_z^2 & u_x u_y & u_x u_z \\ u_y u_x & c^2/n_2^2 - u_x^2 - u_z^2 & u_y u_z \\ u_z u_x & u_z u_y & c^2/n_3^2 - u_x^2 - u_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.107)$$

ويعطي حل معادلة (6.107) معادلة سطح سرعة الشعاع.

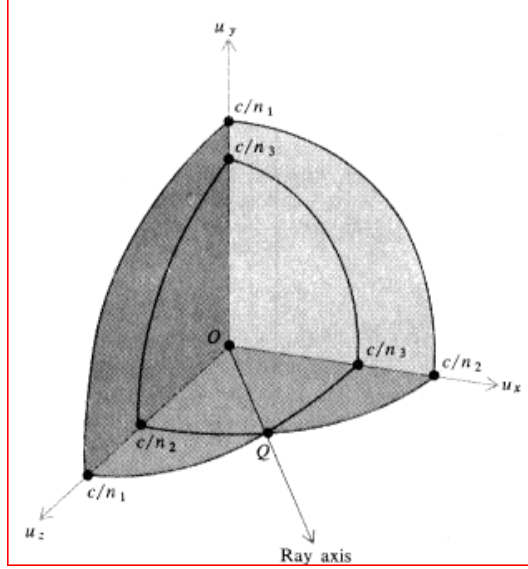
وبشكل خاص، يمكن الحصول على معادلات تعطي التقاطع في المستوى  $xy$  ، وذلك بجعل قيمة  $u_x = 0$ . ونكون هذه النتيجة اما على صورة معادلة دائرة :

$$u_x^2 + u_y^2 = \frac{c^2}{n_3^2} \quad (6.108)$$

او على صورة معادلة منحنى بيضاوي :

$$n_2^2 u_x^2 + n_1^2 u_y^2 = c^2 \quad (6.109)$$

وبنفس الطريقة ، يمكن الحصول على معادلات مقابلة لباقي مستويات الإحداثيات الأخرى وذلك بإستخدام عملية التبديل الدائري *cyclic permutation* بين المتغيرات الإحداثية :  $x-y-z$  ، وفي كل حالة ، تكون معادلات التقاطع على صورة معادلة دائرة و منحنى بيضاوي ( الشكل 6.12 ).



شكل (6.12) سطوح سرعة الشعاع .

كما في حالة سطح سرعة الطور ، يكون سطح سرعة الشعاع مؤلفا من صفيحتين ، داخلية وخارجية ، مقابلتين لقيم  $u$  الممكنة في اي اتجاه لهذا الشعاع. كما تتلامس الصفيحتان عند النقطة  $Q$  والتي تحدد الإتجاه الذي تكون فيه القيم الممكنة لسرعتي الشعاع متساوية ، ويسمى هذا الإتجاه محور الشعاع  $ray\ axis$  ( الشكل 6.12).

اما في حالة البلورات ثنائية المحور ، يوجد محوران شعاعان متميزان عن المحور البصري للبلورة. من ناحية أخرى ، في حالة البلورات أحادية المحور ، تكون صفيحتا سطح الشعاع على شكل كرة ومجسم بيضاوي ، وتكونان متماسكتين عند نهاية القطر الخاص بالكرة الذي يحدد محور الشعاع المنطبق على المحور البصري للبلورة.

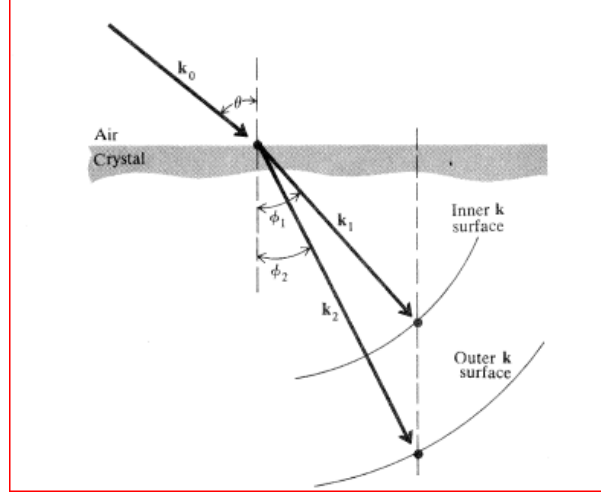
### (6.8) الإنكسار المزدوج عند الحدود *double refraction at boundary*

لنفرض ان موجة مستوية تسقط على سطح بلوري من الهواء ، حيث  $k_0$  يمثل اتجاه سقوط هذه الموجة ،  $k$  يمثل متجه الموجة المنكسرة عند السطح الفاصل بين الوسطين . كما ان  $\theta, \phi$  تعبر عن زوايا السقوط والإنكسار للموجة عند حدود هذا السطح الفاصل ، على الترتيب . بالرجوع الى بند (2.6) ، نجد ان قانون الإنكسار يكون على الصورة التالية

$$\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (\text{at boundary}) \quad (6.110)$$

وتعني معادلة (6.110) ان مساقط متجهات الإنتشار للموجات الساقطة والمنكسرة تكون متساوية عند هذا السطح.

من المعلوم انه في حالة انتشار الموجة الضوئية في البلورات يكون هناك متجهين محتملين للانتشار ، وذلك يعود الى الطبيعة المزدوجة لسطح  $\mathbf{k}$ . ويوضح الشكل (6.13) نتيجة الإنكسار المزدوج للموجة الساقطة على سطح البلورة.



شكل (6.13) متجهات انتشار الموجة في حالة الإنكسار المزدوج عند السطح الفاصل.

كما ان الموجتين المنكسرتين عند السطح الفاصل تحقق المعادلة التالية

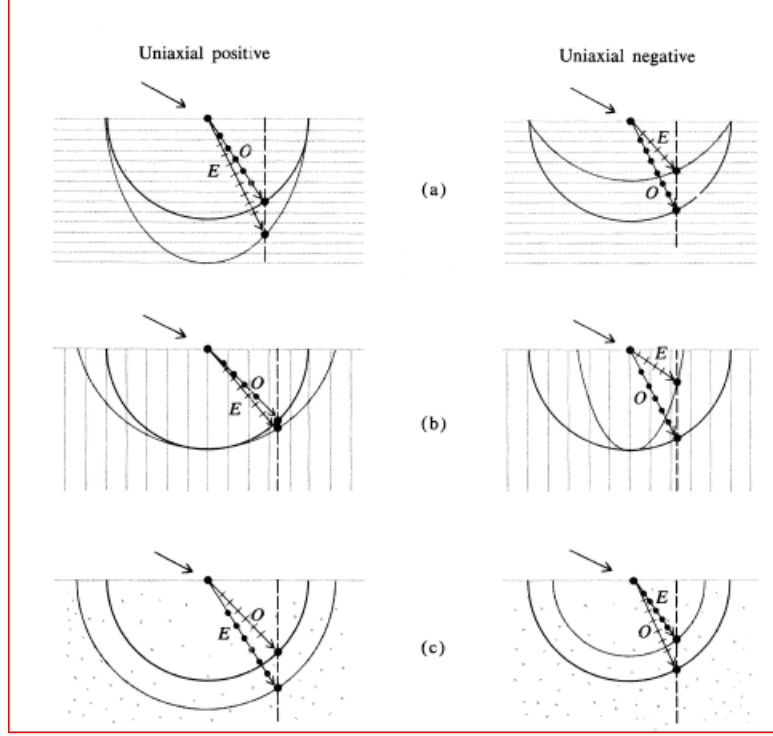
$$k_0 \sin \theta = k_1 \sin \phi_1 \quad k_0 \sin \theta = k_2 \sin \phi_2 \quad (6.111)$$

من اول نظرة ، يبدو ان هذه المعادلات (6.111) تتوفق مع قانون سنل في الإنكسار المزدوج . ولكن فعليا ، يوجد هي غير كذلك ، ويعزى هذا الاختلاف بسبب ان قيم  $k_1, k_2$  ليست ثابتة بشكل عام . وعليه تتغير هذه المعدلات مع تغير اتجاهات هذه الأعداد الموجية للموجات المنكسرة خلال البلورة التي تملك خاصية الإنكسار المزدوج. هذا يعني ان النسبة  $\sin \theta / \sin \phi$  غير ثابتة القيمة كما في حالة الإنكسار عند السطح الفاصل بين الأوساط المتماثلة المناحي . وتكون مسألة إيجاد قيمة  $\phi$  المقابلة لأي زاوية سقوط  $\theta$  غير بسيطة ، ويمكن إيجاد هذه القيمة بالطرق البيانية ( كما في الشكل 6.13). في حالة البلورات احادية المحور ، يكون احد اجزاء سطح  $k$  كرويا ، وتكون قيم العدد الموجي  $k$  ثابتة لكل اتجاهات الإنشار الموجي داخل هذه البلورة. وعليه ، يمكن تطبيق قانون سنل . في هذه الحالة ، تسمى الموجة بالموجة الإعتيادية *ordinary wave* ، كما تكون الصورة الرياضية لهذا القانون كما يلي

$$\frac{\sin \theta}{\sin \phi} = n_o \quad (6.112)$$

حيث  $n_o$  هو معامل الإنكسار الإعتيادي .

وبالرغم من ان سطح  $k$  للموجة الثانية هو سطحا كرويا ، الا انه لا يمكن تطبيق قانون سنل على هذه الموجة المنكسرة ، وتسمى بالموجة غير الإعتيادية *Extraordinary wave* . في حالة الموجة الموجبة المنكسرة في البلورة احادية المحور ، بما ان  $n_E \geq n_o$  ، فإن  $\phi_E \leq \phi_o$  ، اما في حالة البلورات السالبة ذات الإنكسار المزدوج حيث  $n_E \leq n_o$  فإن  $\phi_E \geq \phi_o$  . كما يبين الشكل (6.14) امثلة على متجهات الموجة المنكسرة في البلورات احادية المحور.



شكل (6.14) متجهات الموجة في حالة الإنكسار المزدوج في البلورات احادية المحور:

(a) المحور البصري موازيا للسطح الفاصل ومستوى السقوط

(b) المحور البصري متعامدا مع السطح الفاصل وموازيا لمستوى السقوط

(c) المحور البصري موازيا للسطح الفاصل ومتعامدا مع مستوى السقوط.

وفي كل الحالات السابقة ، يكون الإستقطاب للموجتين متعامدا تبادليا *mutually orthogonal* ( كما في الشكل 6.14).

### ■ المناشير المقطبة Polarizing Prisms

تستخدم هذه المناشير للحصول على ضوء مستقطب ، ويتلخص مبدأ عملها كما يلي:

لنفرض ان موجة ما تسقط من داخل البلورة على سطح فاصل لتتكسر عنده الى وسط اخر ( الهواء ) ، فإذا كانت البلورة احادية المحور وكان المحور البصري لهذه البلورة متعامدا مع مستوى سقوط الموجة ( شكل 6.14c ) ، لذلك يكون المقطع العرضي لسطح  $k$  مؤلفا من دائرتين ، ويكون قانون سنل صالحا لكلا الموجتين ( الإعتيادية وغير الإعتيادية ) . اي

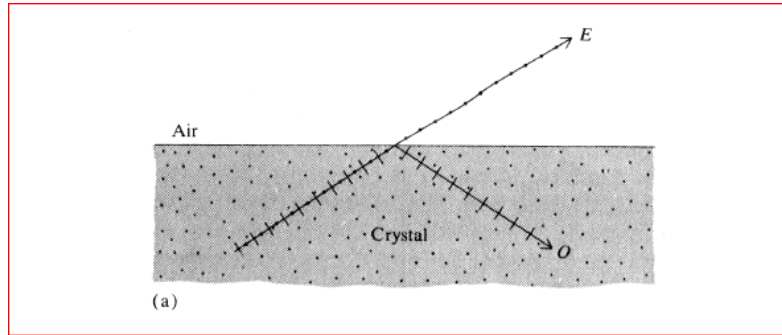
$$n_O \sin \phi_O = \sin \theta \quad (6.113)$$

$$n_E \sin \phi_E = \sin \theta \quad (6.114)$$

كما يكون متجه المجال الكهربائي  $E$  في الموجة الإعتيادية متعامدا مع المحور البصري للبلورة ، بينما يكون هذا المتجه في الموجة غير الإعتيادية موازيا للمحور البصري . لو فرضنا ان البلورة سالبة ، مثل بلورة الكاليسايت  $\text{CaCO}_3$  وكانت الزاوية الداخلية  $\theta$  تحقق ما يلي

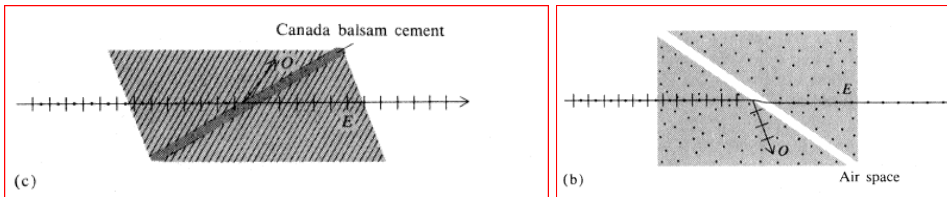
$$n_E < \frac{1}{\sin \theta} < n_O \quad (6.115)$$

في هذه الحالة ، نحصل على انعكاس داخلي كلي للموجة الإعتيادية ، بينما لا يحدث هذا الانعكاس للموجة غير الإعتيادية ، ولكنها تكون منكسرة ومستقطبة كلياً ( الشكل 6.15a ) .



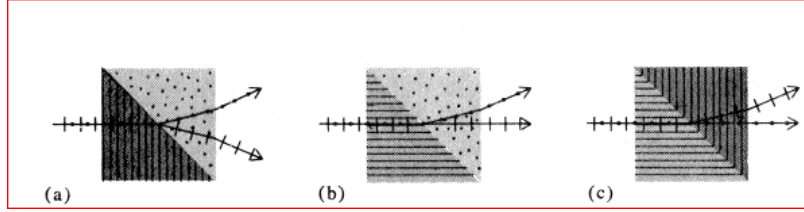
شكل (6.15a) الانعكاس الداخلي على سطح فاصل بين بلورة احادية والهواء .

وحسب هذا المبدأ ، ابتكر جلان *Glan* منشورا *مقطبا* ( شكل 6.15b ) ، وهذا المنشور يتكون من منشورين متماثلين من بلورة الكاليسايت التي تقص بحيث يكون المحور البصري للبلورتين موازيا لحواف الزوايا ، وتثبت بشكل تكون فيه الوجوه الطويلة متوازية ، وقد يملأ الفراغ بين البلورتين بالهواء او اي مادة شفافة اخرى . ومن اقدم المناشير المقطبة ما يعرف ( شكل 6.15c ) ، *بمنشور نيكول Nicol prism* ، الذي تكون فيه زاوية رأس  $38.5^\circ$  *apex angle* ، وتسمى المادة اللاصقة بين البلورتين بمعجون *بلسم كندا Canada balsam cement* .



شكل (6.15b) منشور جلان المقطب. شكل (6.15c) منشور نيكول المقطب.

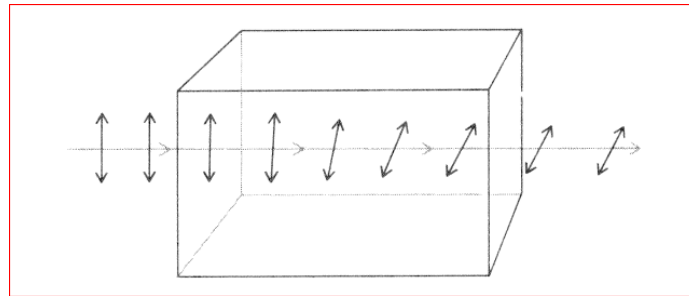
وهناك أنواع أخرى من المناشير المقطبة والمصنوعة من بلورات موجبة (الكوارتز) ، وهذه المناشير تفرق الشعاع الساقط الى شعاعين متباعدين *diverging beams* وفقا لخاصية الإنكسار المزدوج في البلورات ، ويكون الإتجاه الإستقطابي للأشعة المنكسرة تعامديا وبشكل تبادلي ( الشكل 6.16) ، وتعرف هذه المناشير بأسماء مبتكريها : منشور واليستون *Wallaston* ، منشور روتشن *Rochon* ، ومنشور سينارمونت *Senarmont* .



شكل (6.16) مناشير مقطبة : (a) منشور واليستون (b) منشور روتشن (c) منشور سينارمونت .

## (6.9) الفعالية الضوئية *Optical Activity*

تملك بعض المواد خاصية القدرة على تدوير مستوى استقطاب الضوء المار خلالها ، وتعرف هذه الظاهرة بالفعالية الضوئية. في الشكل (6.17) ، نفترض مرور شعاع ضوئي مستقطبا خطيا خلال وسط ناشط ضوئيا . ونتيجة لذلك ، نجد ان مستوى استقطاب الشعاع النافذ من هذا الوسط قد تعرض لدوران *rotation* بزواوية يتناسب مقدارها طرديا مع طول مسار هذا الشعاع في هذا الوسط. ويسمى مقدار الدوران لكل وحدة طول من المسار في الوسط **بالقدرة الدورانية النوعية *specific rotating power*** . فإذا كان اتجاه دوران مستوى الإستقطاب للشعاع المار في وسط ما نحو اليمين ، فإن هذا الوسط يعرف بوسط له دوران يميني **(RC) *right handed*** ( ضد دوران عقارب الساعة ) ، اما اذا كان اتجاه الدوران نحو اليسار فيقال ان الوسط له دوران يساري **(LC) *left handed*** ( مع دوران عقارب الساعة). ومن الأمثلة على الأوساط الناشطة ضوئيا : كلورات الصوديوم *sodium chlorate* ، بعض انواع بلورات السكر *sugar crystal* ، وبلورات الكوارتز *Quartz* التي تكون يمينية ويسارية الدوران ولها خاصية الإنكسار المزدوج.



شكل(6.17) دوران مستوى الإستقطاب لشعاع ما مار في وسط ناشط ضوئيا ( دوران يساري).

كما يوضح الجدول (6.2) الفعالية الضوئية لبلورات الكوارتز بالنسبة لأطوال الأمواج الضوئية المختلفة . وفقا لطول الموجة الضوئية، يسمى التغير في قيمة الفعالية الضوئية **بالتفريق الدوراني rotary dispersion** .

Wavelength (Å)	Specific Rotatory Power (degrees/mm)
4000	49
4500	37
5000	31
5500	26
6000	22
6500	17

جدول(6.2) الفعالية الضوئية لبلورة الكوارتز كدالة لطول موجة الشعاع المار فيها.

وتفسر ظاهرة الفعالية الضوئية على اساس فرضية ان سرعة انتشار الضوء المستقطب الدائري اليميني تختلف عن تلك السرعة في حالة الضوء المستقطب دائري يساري. ولتوضيح ذلك رياضيا، يمكن استخدام **متجه جونز** ( بند 2.5) كما يلي :

لنفرض ان  $n_R, n_L$  معاملات الإنكسار للضوء المستقطب دائري يميني ويساري ، على الترتيب . تكون الأعداد الموجية المناظرة لهذه المعاملات  $k_L = n_L\omega/c$  ،  $k_R = n_R\omega/c$  ، كما تكون الصورة الرياضية لنوعي الموجة ( اليمينية واليسارية) الضوئية المارة في الوسط كما يلي

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{i(k_R z - \omega t)} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{i(k_L z - \omega t)}$$

لنفرض ان استقطاب الضوء الداخل الى الوسط ( الأصلي) **خطيا افقيا** ، و عليه يمكن التعبير عن متجه جونز لهذا الضوء بدلالة مكوناته ( اليمينية واليسارية ) كالتالي

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

وتكون السعة المركبة لموجة الضوء بعد انتشاره مسافة  $l$  في الوسط كالتالي

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{ik_R l} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{ik_L l} \\ & = \frac{1}{2} e^{i(k_R - k_L)l/2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{i(k_R - k_L)l/2} + \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{-i(k_R - k_L)l/2} \right\} \end{aligned} \quad (6.116)$$

لتبسيط الصيغ الرياضية لهذه المعادلات (6.116)، نعرف الكميات  $\psi$ ،  $\theta$  كما يلي

$$\psi = \frac{1}{2}(k_R + k_L)l \quad (6.117)$$

$$\theta = \frac{1}{2}(k_R - k_L)l \quad (6.118)$$

وعليه، تصبح صيغة السعة المركبة كما يلي

$$\begin{aligned} & e^{i\psi} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{i\theta} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{-i\theta} \right\} \\ & = e^{i\psi} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \frac{1}{2}i(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \end{bmatrix} \\ & = e^{i\psi} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.119)$$

تمثل معادلة (6.119) الموجة المستقطبة خطياً في اتجاه جديد يحدده تدوير الإستقطاب الأصلي بزاوية  $\theta$ . من معادلة (6.118)، نجد أن

$$\theta = (n_R - n_L) \frac{\omega l}{2c} = (n_R - n_L) \frac{\pi l}{\lambda} \quad (6.120)$$

حيث  $\lambda$  طول موجة الشعاع في الفراغ. وعليه، تصبح الصيغة الرياضية للقدرة الدورانية النوعية بدلالة طول الموجة كما يلي

$$\delta = (n_R - n_L) \frac{\pi}{\lambda} \quad (6.121)$$

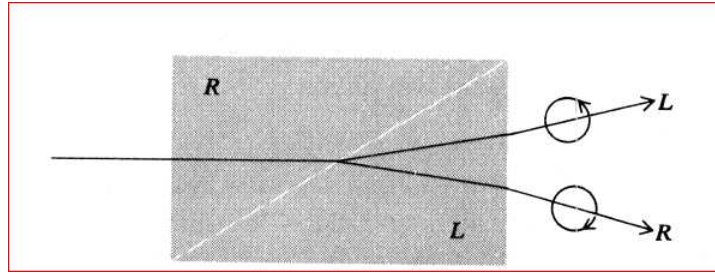
حيث تكون المعاملات  $n_R$ ،  $n_L$  دوال لطول موجة الشعاع. يبين الجدول التالي قيم هذه المعاملات في حالة الأطوال الموجية المختلفة لدى مرورها في بلورة الكوارتز اليمينية الدوران.



$\lambda$	$n_R$	$n_L$	$n_R - n_L$
3960 Å	1.55810	1.55821	0.00011
5890 Å	1.54420	1.54427	0.00007
7600 Å	1.53914	1.53920	0.00006

اما في حالة بلورة الكوارتز اليسارية الدوران ، تكون القيم المعطاة في هذا الجدول معكوسة.

من الجدير بالذكر ، ان العالم فرنيل *Fresnel* كان اول من اشار الى امكانية تفريق الضوء غير المستقطب الى شعاعين مستقطبين بشكل دائري ( يميني ويساري) ومتباعدين ، وذلك باستخدام منشورين من بلورتين من الكوارتز ، احدهما يمينية واخرى يسارية الدوران ، ( الشكل 6.18) .



شكل (6.18) منشور فرنيل لتقسيم الشعاع غير المستقطب الى شعاعين متعاكسين في الإستقطاب الدائري.

وعند السطح الفاصل ( القطر الحدودي ) بين البلورتين ، يكون معامل الإنكسار للضوء المستقطب يمينيا اكبر من الواحد ، بينما يكون هذا المعامل اقل من الواحد للضوء المستقطب يساريا. ولذلك ، يتفرق الشعاع الساقط على المنشور الى قسمين متباعدين لدى سقوطه على هذا السطح الفاصل ( الشكل 6.18) .

#### ■ ممتد القابلية ( التأثيرية) للوسط الفعال □ وئيا

#### *Susceptibility Tensor of an Optically Active Medium*

كما اشرنا في البنود السابقة ، يكون ممتد القابلية الكهربائية للوسط الفعال ضوئيا على الصورة التالية :

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & i\chi_{12} & 0 \\ -i\chi_{12} & \chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \quad (6.122)$$

حيث في هذا الوسط ، تكون عناصر الممتد غير القطرية اعدادا تخيلية *imaginary* ، بينما يكون عنصر الممتد  $\chi_{12}$  عددا حقيقيا *real* . ولبرهان ذلك ، يمكن كتابة مكونات معادلة الموجة ( 6.91) لحالة الإنتشار الضوئي في اتجاه محور  $z$  . وعليه ، نجد ان

$$-k^2 E_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = -\frac{\omega^2}{c^2} (\chi_{11} E_x + i\chi_{12} E_y) \quad (6.123)$$

$$-k^2 E_y + \frac{\omega^2}{c^2} E_y = -\frac{\omega^2}{c^2} (-i\chi_{12} E_x + \chi_{11} E_y) \quad (6.124)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} E_z = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{33} E_z \quad (6.125)$$

لأن الموجة تكون مستعرضة ، نجد ان معادلة (6.125) تعطي  $E_z = 0$ . كما يجب تلاشي محدد المعاملات في المعادلتين الأوليتين (6.123 ، 6.124) ، اي

$$\begin{vmatrix} -k^2 + (\omega^2/c^2)(1 + \chi_{11}) & i(\omega^2/c^2)\chi_{12} \\ -i(\omega^2/c^2)\chi_{12} & -k^2 + (\omega^2/c^2)(1 + \chi_{11}) \end{vmatrix} = 0 \quad (6.126)$$

بحل هذه المعادلة (6.126) ، نجد ان قيم  $k$  تكون كما يلي

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi_{11} \pm \chi_{12}} \quad (6.127)$$

بالتعويض بقيمة  $k$  في اي من المعادلتين (6.123) او (6.124) ، نحصل على التالي

$$E_x = \pm E_y$$

حيث الإشارات في هذه المعادلة تقابل اشارات معادلة (6.127) ، على الترتيب. كما ان قيم  $k$  المعطاة في معادلة (6.127) تقابل حالة الضوء المستقطب دائريا يمينيا ويساريا ، على الترتيب . كما نجد ان معاملات الإنكسار المقابلة لقيم  $k$  تكون كما يلي :

$$n_R = \sqrt{1 + \chi_{11} + \chi_{12}} \quad (6.129)$$

$$n_L = \sqrt{1 + \chi_{11} - \chi_{12}} \quad (6.130)$$

بفك الجذر التربيعي في كل معادلة واعتبار الحدود الأولى فقط ، يكون الفرق بين هذين المعاملين تقريبا كالتالي

$$n_R - n_L \approx \frac{\chi_{12}}{\sqrt{1 + \chi_{11}}} = \frac{\chi_{12}}{n_0} \quad (6.131)$$

حيث  $n_0$  معامل انكسار الضوء الإعتيادي. وعليه ، تصبح الصيغة النهائية لقدرة الدوران النوعية ( معادلة 6.121) كالتالي

$$\delta = \frac{\chi_{12}\pi}{n_0\lambda} \quad (6.132)$$

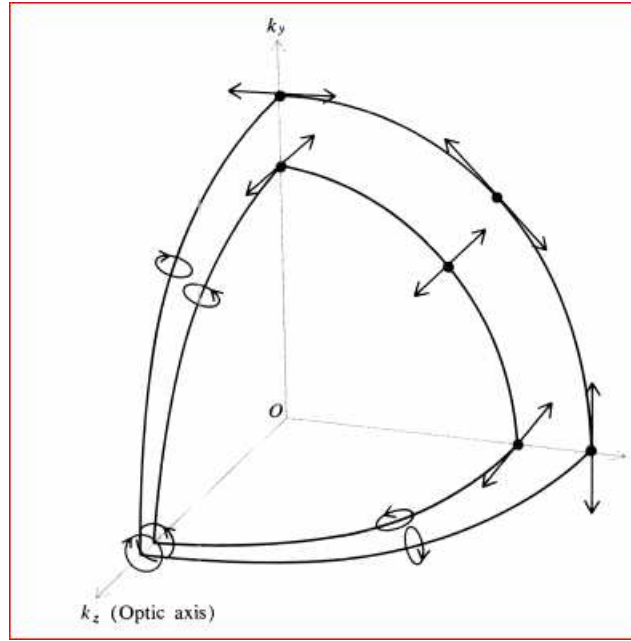
اي ان القدرة الدورانية النوعية للوسط الفعال ضوئيا تتناسب طرديا مع العنصر  $\chi_{12}$  في ممتد قابلية هذا الوسط .

### سطح k- لبلورة الكوارتز *The k- Surface for Quartz*

حيث ان بلورة الكوارتز تملك كلا من خاصية النشاط الضوئي و خاصية الإنكسار المزدوج ، لذلك يكون ممتد القابلية لهذه البلورة بالصورة المبينة في معادلة (6.122) بدلا عن ذلك الممتد المعطى في حالة البلورة احادية المحور. كما يكون سطح k- لبلورة الكوارتز كما يلي

$$\begin{vmatrix} (n_1\omega/c)^2 - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y + i\chi_{12}(\omega/c)^2 & k_x k_z \\ k_y k_x - i\chi_{12}(\omega/c)^2 & (n_1/c)^2 - k_x^2 - k_z^2 - k_y^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & (n_3\omega/c)^2 - k_x^2 - k_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.133)$$

يوضح الشكل (6.19) هذا السطح، حيث تكون صفيحتنا هذا السطح ممثلة لإستقطاب ضوئي ببيضاوي تعامدي *orthogonal elliptical polarization* ، كما يوضح الشكل انواعا من الإستقطاب في الإتجاهات المختلفة بالنسبة لإتجاه المحور البصري للبلورة.



شكل (6.19) سطح متجه الموجة في بلورة الكوارتز.

من هذا الشكل ، نلاحظ عدم تلامس السطوح الداخلية والخارجية ، حيث تكون هذه السطوح متباعدة بمقدار معين ، والذي يتناسب مع  $\chi_{12}$  . لذلك ، يمكن الإعتماد على مقدار هذا التباعد في تحديد مقدار القدرة الدورانية النوعية .

### (6.10) دوران فارادي في الجوامد Faraday Rotation in Solids

في عام 1845 ، اكتشف فارادي ظاهرة دوران مستوى الإستقطاب للشعاع الضوئي النافذ من وسط عازل ومتماثل المناحي عندما يكون هناك مجالا مغناطيسيا خارجيا مسلطا على هذا الوسط و يكون اتجاه سير هذا الشعاع موازيا لإتجاه هذا المجال. كما وجد فارادي ان مقدار هذا الدوران ( $\theta$ ) يتناسب طرديا مع مع كلا من طول مسار الشعاع في الوسط ( $\ell$ ) والحث المغناطيسي  $magnetic\ induction$  ( $B$ ) ، اي

$$\theta = VBl \quad (6.134)$$

حيث  $V$  ثابت التناسب ويسمى بثابت فيردت  $Verdet\ constant$  ، ويعطي الجدول (6.3) مقدار هذا الثابت لبعض المواد مثل: الماس ، الزجاج ، كلوريد الصوديوم .....

Substance	$V$ (Minutes of Angle/per Oe/cm)
Fluorite	0.0009
Diamond	0.012
Glass	
Crown	0.015–0.025
Flint	0.030–0.050
Sodium chloride	0.036

جدول (6.3) قيم ثابت فيردت لبعض المواد.

لتفسير ظاهرة فاردي ، نعتبر معادلة الحركة للإلكترونات المقيدة في الوسط تحت تأثير المجال المغناطيسي  $B$  الخارجي الساكن  $static$  والمجال الكهربائي المتذبذب  $E$  للموجة الضوئية . وتكون الصيغة الرياضية لهذه المعادلة التفاضلية كما يلي

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + K\mathbf{r} = -e\mathbf{E} - e \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \times \mathbf{B} \quad (6.135)$$

حيث  $\mathbf{r}$  تمثل ازاحة الإلكترون المقيد عن موقع الإتزان ( كما في بند 6.4) ،  $K$  ثابت المرونة . ولتبسيط حل هذه المعادلة ، يمكن اهمال تأثير القوة المغناطيسية الضعيف وكذلك القوة المعيقة لحركة الموجة في الوسط والتي تعمل على اضمحلال الموجة الضوئية . كما نفرض ان الإعتماد الزمني للمجال الكهربائي في تلك الموجة يكون على صورة توافقية اسية ، او  $e^{-i\omega t}$  . وعليه ، يكون الإعتماد الزمني للحل الخاص بألزاحة  $\mathbf{r}$  في حالة الثبات هو نفس الإعتماد الزمني للموجة الضوئية ( الدالة الأسية المركبة ). بالتعويض في معادلة (6.135) ، نحصل على التالي

$$-m\omega^2\mathbf{r} + K\mathbf{r} = -e\mathbf{E} + i\omega e\mathbf{r} \times \mathbf{B} \quad (6.136)$$

وحيث ان الإستقطاب  $\mathbf{P}$  يساوي حاصل ضرب ثابت مامع الإزاحة ، اي  $\mathbf{P} = -Ner$  ، لذلك تؤول معادلة (6.136) الى الصورة التالية

$$(-m\omega^2 + K)\mathbf{P} = Ne^2\mathbf{E} + i\omega e\mathbf{P} \times \mathbf{B} \quad (6.137)$$

ولحل هذه المعادلة ، نعيد كتابة هذه المعادلة الإتجاهية بدلالة مكوناتها ومن ثم نحلها لكل مكون من مكونات  $\mathbf{P}$  ، وتكون النتيجة على الصورة العادية التالية

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (6.138)$$

حيث  $\chi$  ممتد القابلية الكهربائية الفعال . و في حالة الوسط الناشط ضوئيا ، تكون الصورة الرياضية لهذا الممتد كما يلي

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & +i\chi_{12} & 0 \\ -i\chi_{12} & \chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \quad (6.139)$$

عند اعتبار ان اتجاه المجال المغناطيسي الخارجي هو باتجاه محور  $z$  ، تكون مكونات هذا الممتد كما يلي

$$\chi_{11} = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left[ \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2\omega_c^2} \right] \quad (6.140)$$

$$\chi_{33} = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] \quad (6.141)$$

$$\chi_{12} = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left[ \frac{\omega\omega_c}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2\omega_c^2} \right] \quad (6.142)$$

حيث يعرف التردد الرنيني *resonance frequency* والتردد الدوراني *cyclotron frequency* كالتالي

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (\text{resonance frequency}) \quad (6.143)$$

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \quad (\text{cyclotron frequency}) \quad (6.144)$$

بالرجوع الى معادلة (6.132) ، نجد ان القدرة الدورانية النوعية الناتجة عن المجال المغناطيسي الخارجي تساوي تقريبا المقدار التالي

$$\delta \approx \frac{\pi N e^2}{\lambda m \epsilon_0} \left[ \frac{\omega \omega_c}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right] = \frac{\pi N e^3}{\lambda m^2 \epsilon_0} \left[ \frac{\omega B}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right] \quad (6.145)$$

حيث عند اشتقاق معادلة (6.145) ، تم افتراض صحة الشرط التالي

$$\omega \omega_c \ll |\omega_0^2 - \omega^2|.$$

### (6.11) الظواهر البصرية - المغناطيسية والبصرية - الكهربائية

#### *Magneto- Optics and Electro- Optics Effects*

وفقا لما ورد في البند السابق ، فإن المادة تصبح ذات انكسار مزدوج وناشطة ضوئيا اذا وضعت تحت تأثير مجال مغناطيسي ساكنا ، ويعزى هذا التحول الى الإختلاف بين قيم  $\chi_{33}$  ,  $\chi_{11}$  . كما يكون هذا الإنكسار المزدوج قليلا عدا في حالة التردد الضوئي القريب من التردد الرنيني ، وتلاحظ هذه الظاهرة بوضوح في حالة الأبخرة الذرية وتسمى بظاهرة *فيردت verdet effect* . فيما يلي نستعرض بعض الظواهر الضوئية- الكهربائية والمغناطيسية وتطبيقاتها العملية .

#### ▪ ظاهرة كيرر البصرية - الكهربائية *Kerr Electro - optic Effect*

في عام 1875 ، وجد العالم كيرر ان عند وضع مادة متماثلة المناحي في مجال كهربى قوي ، تصبح هذه المادة ذات انكسار مزدوج ، وسميت هذه العملية بظاهرة كيرر البصرية - الكهربائية ، وتلاحظ هذه الظاهرة في المواد الصلبة ( الزجاج ) والسوائل. ويعزى سبب حدوث هذه الظاهرة الى اصطاف جزيئات المادة بفعل المجال الكهربى المسلط عليها . وهنا ، تتصرف هذه المادة كما لو كانت بلورة احادية المحور ، كما يحدد اتجاه المجال الكهربى الخارجى المحور البصرى لهذه البلورة . وجد ان مقدار هذه الظاهرة يتناسب مع مربع شدة المجال الكهربى المسلط من الخارج على تلك المادة ، ويعرف ثابت التناسب بثابت كيرر ( $K$ ) ، يعطى الجدول (6.4) قيم هذا الثابت لبعض المواد *Substances* في حالة السيولة .

Substance	$K$ (cm/V <sup>2</sup> )
Benzene	$0.7 \times 10^{-12}$
Carbon disulfide	$3.5 \times 10^{-12}$
Nitrotoluene	$2.0 \times 10^{-10}$
Nitrobenzene	$4.4 \times 10^{-10}$

جدول (6.4) قيم ثابت كيرر لبعض المواد .

لنفرض ان  $n_{\perp}, n_{\parallel}$  هما معاملات انكسار الضوء في الاتجاه الموازي والاتجاه المتعامد مع المجال الكهربائي المسلط على المادة ، على الترتيب. يكون الفرق بين هذين المعاملين كما يلي :

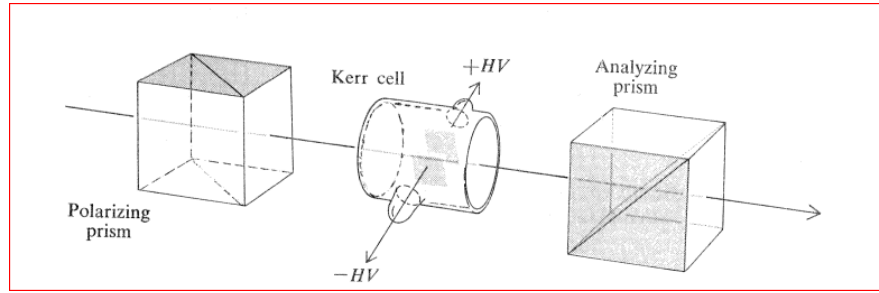
$$n_{\parallel} - n_{\perp} = KE^2\lambda_0 \quad (6.146)$$

حيث  $\lambda_0$  طول موجة الضوء الساقط على المادة في الفراغ .

### خلية كيرر Kerr Cell

من تطبيقات الظاهرة الضوئية – الكهربائية ، ما يعرف بـ **خلية كيرر** ، وهذه الخلية تستخدم كمعدل ضوئي عالي السرعة *high speed light modulator* ( الشكل (6.20) ، وتتكون هذه الخلية من صفيحتين موصلتين ومتوازيتين مغموستان في سائل مناسب مثل سائل النيتروبنزين (حيث يكون فيه ثابت كيرر عالي القيمة) .

من الشكل (6.20) ، يكون محورا نفاذ **المقطب والمحلل** متعامدين ويصنعان  $\pm 45^0$  مع محور الخلية ، كما يكون وضع الخلية عموديا لجعل اتجاه المجال الكهربائي للموجة الضوئية الساقطة على الخلية مائلا بزاوية  $45^0$  مع اتجاه المجال الكهربائي داخل هذه الخلية . كما يلاحظ ، انه لا ينفذ اي ضوء الى الخارج الا عند تسليط مجالا كهربائيا قويا (*HV*) على هذه الخلية.



شكل (6.20) ترتيب المعدل الضوئي لخلية كيرر .

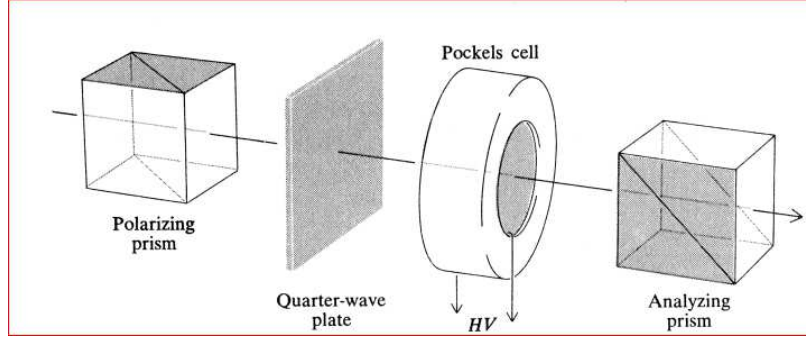
### ظاهرة كوتون – ماوتن Cotton – Mouton Efeect

تعتبر هذه الظاهرة محاكاة مغناطيسية لظاهرة كيرر البصرية – الكهربائية ، حيث وجد ان الجزيئات في بعض السوائل تصطف عند تسليط مجال مغناطيسي خارجي عليها . وكما في ظاهرة كيرر ، فإن هذه الظاهرة تتناسب طرديا مع مربع شدة المجال المغناطيسي المسلط.

### ظاهرة بوكلس Pockles effect

عمليا ، وجد العالم بوكلس ان عند وضع بلورات ذات الإنكسار المزدوج في مجال كهربائي ، فإن قيم معاملات الإنكسار لهذه المواد تتغير ، وتعرف هذه بظاهرة بوكلس ، ويتناسب مقدار هذا التغير مع شدة المجال الخارجي المسلط. تستخدم

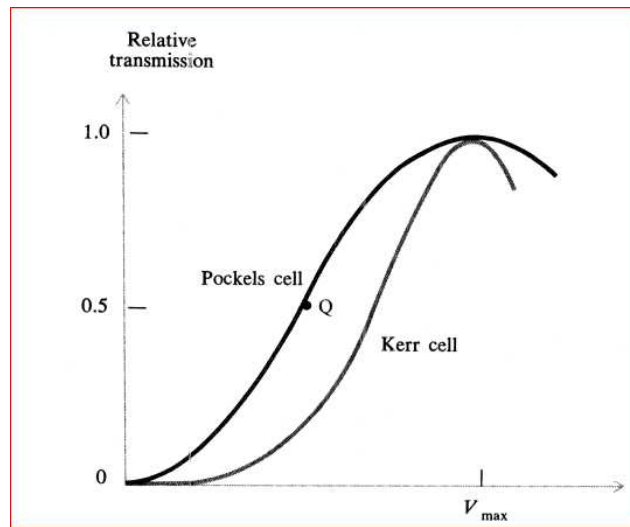
هذه الظاهرة لتصنيع غوالق *shutters* و معدلات ضوئية *modulators* ، حيث تصنع هذه الخلايا من مادة فوسفات الأمونيا ثنائية الهيدروجين (*ADP*) او من مادة فوسفات البوتاسيوم ثنائية الهيدروجين (*KDP*) ، وتوضع بلورات هذه المواد في مجال كهربائي ( بين قطبين كهربيين) ، بحيث يكون اتجاه الضوء المار في الخلية في نفس اتجاه المجال الكهربائي الخارجي ( الشكل 6.21).



شكل (6.21) المعدل الضوئي لخلية بوكلس .

من الشكل (6.21) ، نجد ان وظيفة الصفيحة ربعية الموجة *Quarter wave plate* هو عمل ما يعرف بالإنحياز الضوئي *optical bias* .

عمليا ، تكون العلاقة البيانية الممثلة لشدة النفاذية الضوئية كدالة للجهد الكهربائي العالي (*HV*) ، لخلية كيبرر وخلية بوكلس ، كما هو موضح في الشكل ( 6.22) . تمثل النقطة *Q* على المنحنى الخاص بخلية بوكلس نقطة التشغيل لهذه الخلية عند استخدام اللوح ربعي الموجة .





شكل (6.22) منحنيات دالة شدة النفاذية الضوئية لخلايا كيرر وبوكلس

### تمارين

(6.1) برهن ما يلي: اذا كان الجزء التخيلي من معامل انكسار مركب  $k$  اقل بكثير من جزئه الحقيقي  $n$  ، فإن في حالة التردد الرنيني المنفرد  $\omega_0$  ، يكون التقريب لهذه الأجزاء صحيحا وعلى الصورة التالية

$$n = 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

$$\kappa = \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \left( \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right)$$

(6.2) استخدم نتيجة (6.1) لبرهان ان قيم  $n$  العظمى والصغرى تقع عند الترددات المحددة لقيمة  $k$  والمقابلة لقيمة النصف العظمى ( الشكل 6.1) .

(6.3) اشتق معادلة سيميلير *Sellmeier's equation* التي تعطي معامل انكسار الوسط الماص للضوء كدالة لطول موجة هذا الضوء ، او

$$n^2 = 1 + \frac{A_1\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{A_2\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} + \dots$$

(6.4) اذا كان التردد البلازمي لمعدن إفتراضي يساوي  $\omega_p = 10^{15} /s$  ، وزمن التراخي يساوي  $\tau = 10^{-13} s$  ، جد قيم الجزء الحقيقي والتخيلي لمعامل الإنكسار هذا المعدن عند الترددات التالية:

$$\omega = \frac{\omega_p}{2}, \quad \omega = 2\omega_p, \quad \omega = \omega_p$$

(6.5) اذا كانت انعكاسية سطح معدن ما تساوي 80% للسقوط العمودي ، وكان معامل الإنطفاء للمعدن  $k=4$  ، جد الجزء الحقيقي لمعامل الإنكسار المركب لهذا المعدن.

(6.6) اذا كانت الموصلية للفضة  $6.8 \times 10^7 \text{ mho}/m^3$  ، وعلى فرضية ان حاملات الشحنة داخل الموصل هي الإلكترونات الحرة بكثافة حجمية  $1.5 \times 10^{28} /m^3$  ، جد ما يلي

(a) التردد البلازمي

(b) زمن التراخي

(c) الجزء الحقيقي والتخيلي لمعامل الإنكسار

(d) الإنعكاسية عند  $\lambda = 1\mu m$  .

(6.7) برهن ان التغيير في الطور الذي يحدث عند انعكاس الضوء في حالة السقوط العمودي ، يساوي

$$\tan^{-1} \left( \frac{2\kappa}{n^2 + \kappa^2 - 1} \right)$$

(6.8) جد الإنعكاسية والتغير في الطور عند انعكاس ضوء طول موجته  $\lambda = 500 \text{ nm}$  ، عند سطح فاصل لوسط ما ، حيث  $n = 1.5, k = 3.2$  .

(6.9) في البند (6.6) ، تتبع الخطوات الجبرية بالتفصيل لبرهان ان معامل الإنعكاس ، في حالة الأستقطاب الموجي TM ، عند السطح الفاصل لوسط ماص يكون

$$r_p = \frac{-\mathcal{N} \cos \theta + \cos \phi}{\mathcal{N} \cos \theta + \cos \phi}$$

(6.10) برهن باستخدام الصيغة الرياضية لمعامل الإنكسار الفعال :  $n_{eff} = \sin \theta / \cos \phi$  ، تكون العلاقة

$$(n_{eff}^2 - n^2 + \kappa^2)(n_{eff}^2 - \sin^2 \theta) = n^2 \kappa^2$$

صحيحة في حالة سقوط الشعاع بشكل مائل على سطح فاصل لوسط ماص معامل انكساره عدد مركب ، اي  $\mathcal{N} = n + ik$  .

(6.11) في حالة البلورة احادية المحور ، اذا قطعت هذه البلورة بحيث يكون محورها البصري متعامدا مع سطحها ، اثبت ان :

$$\tan \phi_E = \frac{n_o}{n_E} \frac{\sin \theta}{\sqrt{n_E^2 - \sin^2 \theta}}$$

حيث ،  $\theta, \phi_E$  زاوية سقوط الموجة و زاوية انكسار الموجة غير الإعتيادية في الوسط ، على الترتيب.

(6.12) اشتق معادلة فرينل لسطح سرعة الطور ، اي

$$\frac{v_x^2}{c^2 - c^2/n_1^2} + \frac{v_y^2}{v^2 - c^2/n_2^2} + \frac{v_z^2}{v^2 - c^2/n_3^2} = 0$$

(6.13) حدد الزاوية التي يجب ان يقطع بها الوجه القطري *diagonal face* لمنشور جلين المقطب و المصنوع من بلورة الكواتز.

(6.14) منشور كوارتزي زاوية رأسه  $30^\circ$  ، اذا كان المحور البصري لهذا المنشور يوازي حافة الرأس وسقط شعاع عادي و النافذة من المنشور .  $(\lambda_0 = 5890 \text{ \AA})$  على هذا المنشور في وضع النهاية الصغرى للانحراف ، جد الزاوية بين الشعاع العادي وغير العادي و النافذة من المنشور .

## الفصل السابع: الإشعاع الحراري Thermal Radiation

نتناول في هذا الفصل المبادئ الأساسية للضوء الكمي ، وذلك من دراسة ظاهرة اشعاع الجسم الأسود المثالي . وندرس تفسير النظرية الكلاسيكية لطبيعة هذا الإشعاع من خلال قانون بلانك . كذلك ، نعرض تفسيراً للظاهرة الكهروضوئية ومعادلة اينشتاين وطبيعة الفوتونات الإزدواجية من خلال معادلة دي بولي . ونقدم شرحاً لمبدأ اللاتحديد (الشك) لهيزنبرغ .

### (7.1) الإشعاع الحراري Thermal Radiation

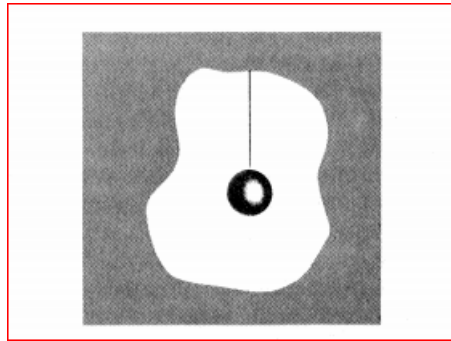
تسمى الطاقة الكهرومغناطيسية التي تنبعث من سطوح الأجسام الساخنة بالأشعاع الحراري ، اذ يتألف هذا الإشعاع من طيف مستمر من الترددات الممتدة الى مدى واسع . عملياً ، وجد ان التوزيع الطيفي *spectral distribution* وكمية الطاقة المشعة من هذه الأجسام تعتمد بشكل رئيسي على درجة حرارة السطح المشع.

عند اعتبار التوزيع الطيفي للأشعاع ، تشير القياسات الى ان قيمة القدرة المشعة تكون عظمى عند درجة حرارة معينة ، ويقابل ذلك تردد محدد ( او طول موجة محددة) لهذا الأشعاع. كما يكون هذا التردد متغيراً ويتناسب طردياً مع درجة حرارة السطح المشع ، وهذا يعرف بقانون فين **Wien's law** . فمثلاً ، عندما تكون درجة حرارة الجسم المشع مساوية لدرجة حرارة الغرفة ، فإن موقع القيمة العظمى لمنحنى الإشعاع يكون في منطقة الطيف تحت الحمراء *infrared region* ، ولا يوجد اشعاع مرئي بشكل محسوس . وعندما تكون درجة حرارة هذا الجسم اعلى من  $500^{\circ}\text{k}$  يبدأ هذا الجسم الساخن بالتوهج . كما يكون معدل اشعاع الطاقة من هذا الجسم معتمداً على درجة حرارته ، وتشير القياسات العملية الى ان القدرة الكلية المشعة تتناسب مع القوة الرابعة لدرجة حرارة الجسم المطلقة، وهذا ما يعرف بقانون ستيفان - بولتزمان *Stefan- Boltzman law*.

سنتناول في هذا الفصل اشتقاق هذه القوانين بالإعتماد على النظرية الأساسية المتعلقة باشعاع الأجسام الساخنة .

### (7.2) قانون كيرشوف - الجسم الأسود *Kirchhoff Law - Blackbody*

نفترض وجود فجوة *cavity* ، تحوي بداخلها على جسماً معزولاً حرارياً عن جدران هذه الفجوة ( الشكل 7.1) .



شكل (7.1) جسم معزول داخل فجوة .

إذا كانت جدران الفجوة محفوظة عند درجة حرارة ثابتة ، فإن الإشعاع الحراري يملأ هذه الفجوة ، ويمتص الجسم جزءاً من هذا الإشعاع ، كما يحدث انبعاث إشعاعي حراري من هذا الجسم . وعليه ، نصل الى حالة الإتزان الحراري للنظام عند تساوي معدل الانبعاث من الجسم مع معدل امتصاصه للإشعاع الحراري ، وفي هذه الحالة ، تتساوى درجة حرارة الجسم مع درجة حرارة الفجوة .

لنفرض ان  $I$  مقدار الإشعاعية الحرارية *irradiance* في الفجوة ( القدرة الكلية / وحدة مساحة من الجسم داخل الفجوة). كذلك  $b$  تمثل الجزء من الطاقة الساقطة التي يمتصها هذا الجسم ،  $H$  الإشعاعية ( القدرة المنبعثة من وحدة مساحة الجسم ) . في حالة الإتزان الحراري ، تربط هذه الكميات العلاقة التالية

$$H = bI \quad (7.1)$$

لو فرضنا وجود اكثر من جسم داخل هذه الفجوة وكان كل جسم في حالة اتزان حراري ، فإننا نحصل على العلاقات التالية

$$H_1 = b_1 I, H_2 = b_2 I, H_3 = b_3 I, \dots$$

$$I = \frac{H_1}{b_1} = \frac{H_2}{b_2} = \dots \quad (7.2)$$

تعني هذه المعادلة ، عند درجة حرارة معينة ، ان النسبة بين القدرة المنبعثة الى القدرة الممتصة متساوية لكل الأجسام في الفجوة ، كما تمثل هذه النسبة مقدار الإشعاعية في الفجوة . وتعرف هذه العلاقة (7.2) بقانون كيرشوف *Kirchoff law* . كما يسمى الجسم ذو الإمتصاصية المثالية *perfect absorber* بالجسم الأسود *Blackbody* . تكون قيمة  $b$  لهذا الجسم تساوي الواحد الصحيح ، وعندها تكون قيمة  $H$  قيمة عظمى ، اي

$$H_{\max} = I \quad (7.3)$$

فيزيائياً ، يعرف الجسم الأسود المثالي بأنه ذلك الجسم الذي يملك اكبر قيمة من الكفاءة الإنبعاثية الحرارية . وفي هذه الحالة تكون القدرة المشعة / وحدة مساحة مساوية لمقدار الإشعاعية في الفجوة .

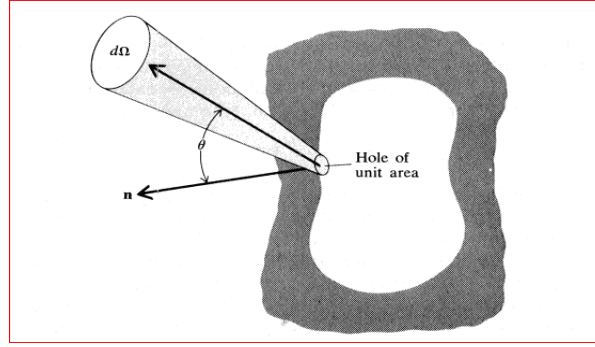
ولحساب معدل الإشعاع المنبعث من الجسم الأسود ، نفرض ان هذا الشعاع ينبعث من ثقب ضيق في الفجوة السابقة ،  $u$  كثافة طاقة الترددات الإشعاعية داخل الفجوة ،  $u_\nu$  الكثافة الطيفية ( كثافة الطاقة / وحدة فترة ترددية متركزة حول قيمة معينة للتردد  $\nu$  ) . وعليه ،

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu \quad (7.4)$$

حيث ان الإشعاع الحراري ينبعث في كافة الإتجاهات بسرعة الضوء في الفراغ ( $c$ ) ، لذلك يمثل المقدار  $d\Omega/4\pi$  الإشعاع المنبعث من الجسم المشع من خلال ثقب مساحته الوحدة في اتجاه ما خلال عنصر من الزاوية المجسمة

$d\Omega$  . كما تكون كمية الطاقة المتدفقة من هذا الثقب في وحدة زمن تساوي  $\frac{uc \cos \theta d\Omega}{4\pi}$  ، حيث

$\theta$  الزاوية المحصورة بين اتجاه الشعاع المنطلق من الثقب واتجاه العمودي على مستوى هذا الثقب الشكل (7.2) ، رياضيا ، يعطى عنصر الزاوية المجسمة في الإحداثيات الكروية كما يلي:  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$  .



شكل (7.2) الأشعاع المنبعث من ثقب في فجوة .

حيث  $\hat{n}$  هو متجه الوحدة العمودي على مستوى الثقب. بالتكامل ، تكون الطاقة الكلية المشعة لكل وحدة مساحة في وحدة زمن في كافة الإتجاهات الممكنة خلال الزاوية المجسمة  $2\pi$  ( نصف الكرة التي مركزها الثقب) كما يلي

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} uc \cos \theta \sin \theta \frac{d\theta d\phi}{4\pi} = \frac{uc}{4}$$

وعليه ، تكون اشعاعية الجسم الأسود مساوية لقيمة هذا التكامل ، اي

$$I = \frac{uc}{4} \quad (7.5)$$

وبالمقابل ، اذا كانت  $u_\nu$  تمثل كثافة الطاقة الطيفية ، فإن الإشعاعية الطيفية تعطى كما يلي

$$I_\nu = \frac{u_\nu c}{4} \quad (7.6)$$

فيزيائيا ، يمثل هذا المقدار (معادلة 7.6) القدرة المشعة / وحدة مساحة / وحدة فترة ترددية متمركزة حول  $\nu$ .

اما شدة الكثافة intensity ( $\mathcal{F}$ ) ، فهي تعبر عن القدرة الأشعاعية/ وحدة زاوية مجسمة / وحدة مساحة من السطح المشع ، اذا كان الأشعاع في الإتجاه العمودي على السطح ، فإن

$$\mathcal{F} = uc/4\pi = I/\pi$$

وبالمثل ، تكون الكثافة الطيفية spectral intensity كما يلي

$$\mathcal{F} = u_\nu c/4\pi = I_\nu/\pi$$

وهذه الكمية تمثل القدرة الإشعاعية لكل وحدة مساحة لكل وحدة زاوية مجسمة لكل وحدة فترة ترددية في الإتجاه العمودي على السطح المشع.

### (7.3) أنماط الإشعاع الكهرومغناطيسي في فجوة

#### Modes of Electromagnetic Radiation in a Cavity

لإيجاد كثافة الإشعاع الكهرومغناطيسي في داخل فجوة ما ، يلزم البحث عن نماذج الأمواج الساكنة *standing waves* ( أنماط الإشعاع ) المحتملة داخل هذه الفجوة . ولتسهيل المعالجة الرياضية ، نعتبر الفجوة على شكل متوازي مستطيلات . وعليه ، تنتج الأمواج الساكنة من التراكم الخطي لدوال الأمواج ( تداخل الأمواج المحصورة داخل الفجوة ) والتي تعتمد في الأساس على دالة الموجة الأساسية ذات التعبير الرياضي التالي

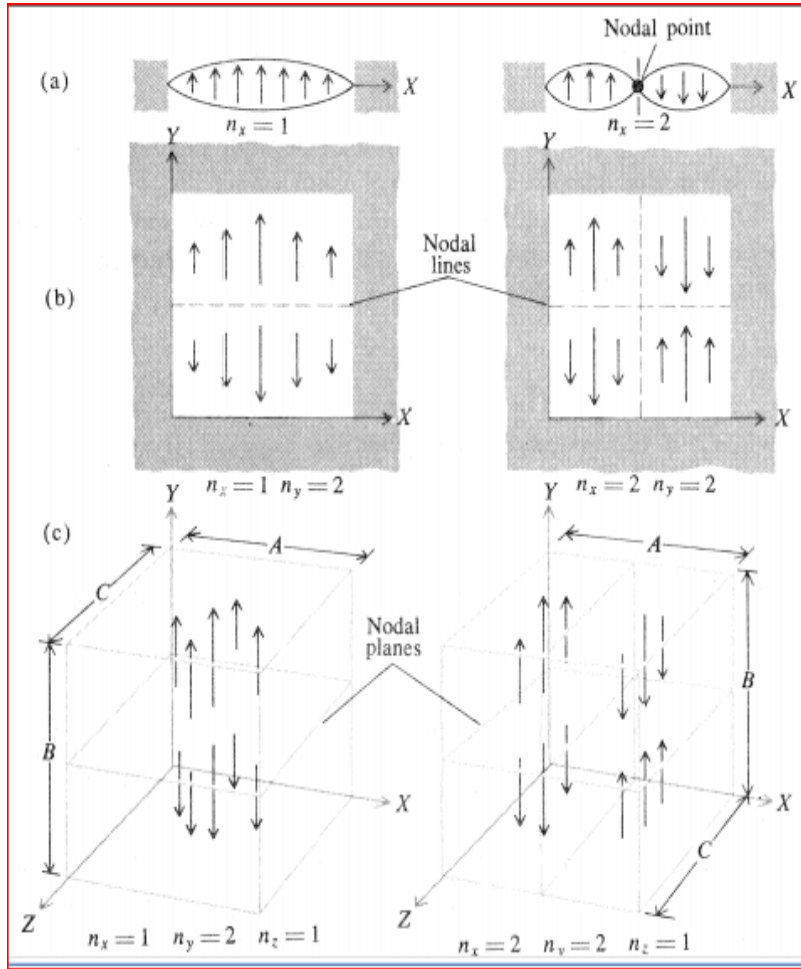
$$e^{i(k.r-\omega t)} = e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} e^{-i\omega t}$$

حيث  $k_x, k_y, k_z$  هي مركبات متجه العدد الموجي  $\mathbf{k}$  . لنفرض ان  $A, B, C$  تمثل ابعاد الفجوة في الإتجاهات  $x, y, z$  ، على الترتيب . حتى يكون هناك نموذج لموجة ساكنة ( نمط ) ، يلزم ان تكون دالة الموجة دورية *periodic* وبصيغة تحقق الشروط التالية

$$k_x A = \pi n_x \quad k_y B = \pi n_y \quad k_z C = \pi n_z \quad (7.9)$$

حيث  $n_x, n_y, n_z$  اعدادا صحيحة ، وكل مجموعة  $\{n_x, n_y, n_z\}$  من هذه الأرقام تشكل نمطا *mode* لهذا الإشعاع في تلك الفجوة ( شكل 7.3). ويعبر عن النمط على صورة ترتيب من هذه الأرقام السابقة ، اي، يكون ادني نمطين في الفجوة احادية البعد هما :  $(n=1, n=2)$  ، ( الشكل 7.3a) . اما في حالة الفجوة ثنائية الأبعاد *two dimensional cavity* ، يعبر عن الأنماط :  $(1,2)$  ،  $(2,2)$  . اما في الفجوة ثلاثية الأبعاد ، فيعبر عن هذه الأنماط

بالصورة (1,2,1) ، (2,2,1) ( الشكل 7.3b,c) . كما يبين هذا الشكل النقاط العقدية *nodal points* للفجوة احادية البعد ، الخط العقدي للفجوة ثنائية البعد ، والمستوى العقدي *nodal plane* للفجوة ثلاثية الأبعاد .



شكل (7.3) انماط الموجة في فجوات متنوعة (a) فجوة احادية البعد (b) فجوة ثنائية الأبعاد

(c) فجوة ثلاثية الأبعاد.

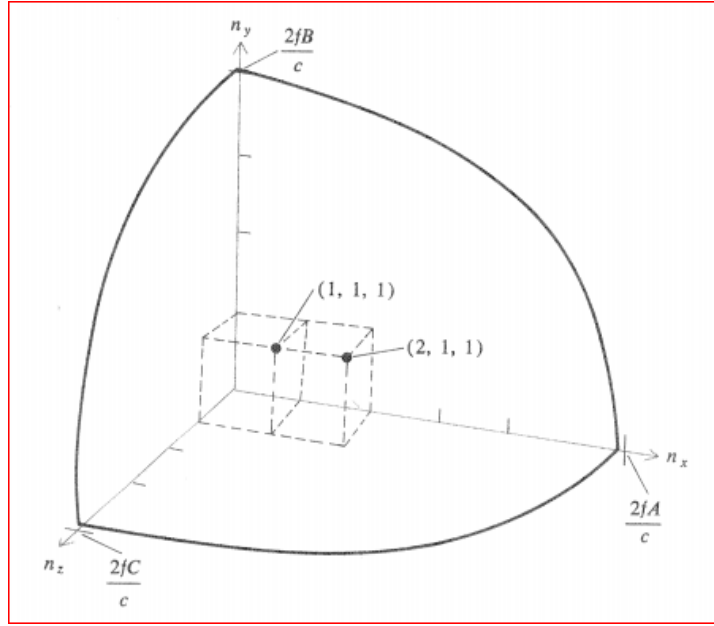
حيث  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$  ، انن ،

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \pi^2 \left( \frac{n_x^2}{A^2} + \frac{n_y^2}{B^2} + \frac{n_z^2}{C^2} \right) \quad (7.10)$$

او ما يكافئ المعادلة التالية

$$\frac{4\nu^2}{c^2} = \frac{n_x^2}{A^2} + \frac{n_y^2}{B^2} + \frac{n_z^2}{C^2} \quad (7.11)$$

تبين هذه المعادلة (7.11) ان عند تردد ما  $\nu$  ، يكون هناك قيم محددة للأعداد  $n_x, n_y, n_z$  مسموحا بها .  
 بالتمثيل البياني لهذه المعادلة بدلالة الأحداثيات  $n_x, n_y, n_z$  ، نحصل على الشكل (7.4) .



شكل (7.4) وحدة مكعب والنقاط المرافقة والممثلة لأنماط الفجوة (مقطع ثماني من الجسم البيضاوي) .

رياضيا ، يمثل التعبير الرياضي (7.11) معادلة مجسما بيضاويا ذات انصاف محاور *semiaxes* هي :

و عليه ، يكون حجم المثلث *octant* من الجسم البيضاوي ( في الربع الأول من الشكل 7.4) كما يلي

$$\frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} \frac{2\nu A}{c} \frac{2\nu B}{c} \frac{2\nu C}{c} = \frac{4\pi\nu^3 ABC}{3c^3} = \frac{4\pi\nu^3}{3c^3} V \quad (7.12)$$

حيث يكون حجم الفجوة  $V = ABC$  . بما ان كل مكعب الوحدة يمثل نمط واحد ، لذلك ، تعطي معادلة (7.12) عدد الأنماط لكل الترددات التي تكون اقل او تساوي التردد  $\nu$  . كما نلاحظ ان مثلث واحد من الجسم البيضاوي يكفي لإحصاء عدد هذه الأنماط ، حيث قيم  $n$  الموجبة والسالبة تمثل نفس النمط .



بما انه يوجد لكل اتجاه ينتشر فيه الشعاع حالتي استقطاب متعامدة في داخل الفجوة ، فإن العدد المعطى في معادلة (7.12) يجب ضربه بالمعامل (2) . وعليه ، تصبح القيمة النهائية لعدد الأنماط (g) لكل وحدة حجم ولجميع الترددات التي هي اقل او تساوي  $\nu$  ، كما يلي

$$g = \frac{8\pi}{3c^3} \nu^3 \quad (7.13)$$

بإشتقاق هذه المعادلة (7.13) ، نحصل على عدد الأنماط في وحدة حجم الترددات المحصورة بين الفترة الترددية  $\{\nu, \nu + d\nu\}$  وهو

$$dg = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (7.14)$$

وعادة ، يعبر عن عدد الأنماط لكل وحدة حجم في وحدة الفترة الترددية كالتالي

$$g_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \quad (7.15)$$

من الجدير بالذكر ، ان هذه النتائج ، وان تم اشتقاقها للفجوة المستطيلة الأضلاع ، الا انها لا تعتمد على الشكل الهندسي لهذه الفجوة بشرط ان تكون ابعاد الفجوة كبيرة بالنسبة لطول موجة الإشعاع في داخلها.

#### (7.4) النظرية الكلاسيكية لإشعاع الجسم الأسود : قانون ريلي – جينز

#### The Classical Theory of Blackbody Radiation: Rayleigh- Jeans Formula

وفقا للنظرية الحركية الكلاسيكية ، فإن درجة حرارة اي غاز تكون مقياسا لمعدل الطاقة الحركية لجزيئات هذا الغاز ، كما ان متوسط الطاقة المرافقة لكل درجة من درجات الحرية *degree of freedom* في حركة هذا الجزيء تساوي  $\frac{1}{2} kT$  ، حيث  $k$  ثابت بولتزمان ،  $T$  درجة حرارة الغاز المطلقة . وتعرف هذه القاعدة بمبدأ تساوي توزيع الطاقة *principle of energy equipartition* ، وتنطبق هذه القاعدة على انظمة الغازات التي تكون في حالة اتزان ثيرموديناميكي .

لاحقا ، اقترح العالمان اللورد ريلي و جيمس جينز احتمال تطبيق هذه القاعدة على جدران الفجوة ( الجسم الأسود ) ، اي احتمالية تساوي توزيع الطاقة بين انماط الفجوة . كما افترض هذان العالمان ان متوسط الطاقة لكل نمط تساوي  $kT$  . وعليه ، يكون كلا من المجال الكهربائي والمجال المغناطيسي ممثلا لدرجة حرية واحدة .

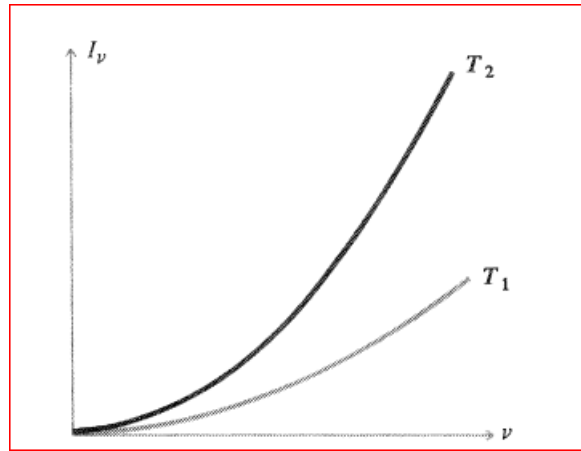
اذا اعتبرنا ان  $g_\nu$  يمثل عدد الأنماط / وحدة حجم في كل وحدة فترة ترددية ، فإن الكثافة الطيفية للأشعاع الحراري تساوي  $g_\nu kT$  . وعليه ، بإستخدام معادلة (7.15) ، نحصل على

$$u_\nu = g_\nu kT = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3} \quad (7.16)$$

وهذا يشير ، من وجهة نظر معادلة (7.7) ، الى ان الصورة الرياضية للإشعاعية الطيفية ( القدرة لكل وحدة مساحة ولكل وحدة الفترة الترددية ) هي

$$I_\nu = \frac{2\pi\nu^2 kT}{c^2} \quad (7.17)$$

وتسمى هذه المعادلة بقانون ريلي - جينز . ومن هذا القانون نلاحظ ان التوزيع الطيفي لإشعاع الجسم الأسود يتناسب مع مربع التردد ( الشكل 7.5 ) .



شكل (7.5) منحنى قانون ريلي - جينز عند درجات حرارة مختلفة .

ويلاحظ من هذا الشكل ان منحنيات  $I_\nu$  كدالة للتردد  $\nu$  تكون على صورة قطع مكافئ . وفي حالة الترددات المنخفضة بدرجة كافية ، نجد ان القيم التي يعطيها القانون تتفق الى درجة كبيرة مع القيم المناظرة لها في التجربة العملية . بينما في حالة الترددات العالية ، فإن القانون يتنبأ بمزيد من الأشعاع ، وهذا بالطبع ، يتناقض مع نتائج التجربة العملية ، ويعرف هذا التناقض بالكارثة الفوق بنفسجية *Ultra catastrophe* للنظرية الكلاسيكية الخاصة بالإشعاع ، حيث تشير هذه الظاهرة ان هناك خطأ جوهري في النهج الكلاسيكي لتفسير اشعاع الجسم الأسود .

### ( 7.5 ) اشعاع الفجوة المكمم *Quantization of Cavity Radiation*

في عام 1901 ، ادخل العالم بلانك **Planck** فكرة انه يمكن اعتبار الإشعاع الكهرومغناطيسي *مكمما quantized* ، وذلك لتفادي الكارثة الفوق بنفسجية التي اصطدمت بها النظرية الكلاسيكية . حيث اشتق بلانك معادلة الإنبعاث الحراري

من الجسم الأسود بالتوافق التام مع الملاحظة العملية . وهذا يعتبر بداية **نظرية الكم Quantum Theory** . وهنا ، رفض بلانك فكرة تساوي توزيع الطاقة في الإشعاع المنبعث من الجسم الأسود وبدلا من ذلك افترض ان الطاقة المصاحبة لكل نمط تكون مكتمة ( اي تكون قيم الطاقة على شكل رزم وبمضاعفات صحيحة لطاقة تدعى **الكوانتا** ، كما تسمى الكوانتا في الإشعاع الكهرومغناطيسي **فوتون photon** ، وان طاقة الفوتون تتناسب مع تردد الإشعاع ، ويعرف ثابت التناسب في هذه العلاقة بـ **ثابت بلانك (h)** ، اي ان طاقة الفوتون الذي تردده  $\nu$  تساوي  $h\nu$  . وحسب نظرية بلانك للإشعاع فإن الأنماط في الفجوة تحوي *occupied* على أعداد صحيحة من الفوتونات وتكون مقادير طاقة هذه الأنماط:  $0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots$  . لنفرض ان  $\langle n_\nu \rangle$  يرمز الى معدل عدد الفوتونات لكل نمط ، حيث يسمى هذا الرمز بمعامل **الإشغال occupation number** . وعليه ، يكون معدل طاقة النمط يساوي  $\langle n_\nu \rangle h\nu$  . وكذلك ، يتبع من معادلة (7.15) ان الكثافة الطيفية لأشعاع الفجوة هي

$$u_\nu = g_\nu h\nu \langle n_\nu \rangle = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \langle n_\nu \rangle \quad (7.18)$$

كما تكون الإشعاعية الطيفية المقابلة في حالة الجسم الأسود المشع كما يلي

$$I_\nu = \frac{1}{4} c g_\nu h\nu \langle n_\nu \rangle = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \langle n_\nu \rangle \quad (7.19)$$

في البند اللاحق ، سنتناول ايجاد معامل الأشغال بدلالة التردد .

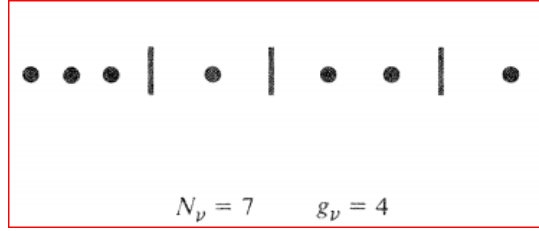
### (7.6) احصائية الفوتون – قانون بلانك Photon Statistics – Planck Formula

لدراسة كيفية توزيع الفوتونات في أنماط الفجوة ، نستخدم مبدأ الأحصاء الميكانيكي الأحصائي الخاص بحساب عدد الطرق الكلية ( $W$ ) التي يتم بها ترتيب عدد من الجسيمات ( او الفوتونات ) في اي توزيع مطلق *arbitrary distribution* وفقا لشروط معينة . وبالتالي ، يمكن ايجاد توزيعا خاصا تكون فيه قيمة  $W$  اعظم ما يمكن ، حيث يكون هذا التوزيع هو التوزيع السائد ، مما يجعله **التوزيع الأكثر احتمالا most probable** بالنسبة للتوزيعات الأخرى الممكنة .

لتطبيق هذه الطريقة الإحصائية على اشعاع الفجوة ، نقسم الطيف الترددي الى عدد لانهاضي من الفترات . بما ان مدى الفترة اختياريًا ، يمكن ان نختار هذا المدى بمقدار الوحدة (1) . نفرض ان عدد الأنماط في كل فترة ترددية  $g_\nu$  وان  $N_\nu$  عدد الفوتونات في الوحدة الترددية المتمركزة حول التردد  $\nu$  . وعليه ، يكون معامل الإشغال المساوي للمقدار  $(N_\nu/g_\nu)$  والذي يجعل قيمة  $W$  **عظمى** كما يلي

$$\langle n_\nu \rangle = \left( \frac{N_\nu}{g_\nu} \right)_{\max} \quad (7.20)$$

ثم ، نبحث عن عدد الترتيبات الممكنة لتوزيع  $N_\nu$  فوتونا على  $g_\nu$  نمطا مختلفا في هذه الفترة الترددية الوحيدة . ويتم ذلك باعتبار ان الفوتونات جسيمات متشابهة *identical* موضوعة على خط مستقيم ( الشكل 7.6 ) ، حيث تمثل النقاط على هذا الخط موقع الفوتونات ، بينما تمثل الحواجز في هذا الشكل المقصورات ( الحجرات ) .



شكل(7.6) ترتيب عدد من الجسيمات ( الفوتونات ) في حجرات ( انماط ) .

يكون عدد هذه المقصورات مساويا للمقدار  $g_\nu - 1$  ، ويكون العدد الكلي لطرق ترتيب جميع النقاط والحواجز في المواقع المتاحة مساويا للعدد الكلي لطرق تبديل *permutation* (  $N_\nu + g_\nu - 1$  ) من الأشياء ، ويساوي هذا العدد  $(N_\nu + g_\nu - 1)!$  . بما ان النقاط وكذلك الحواجز متشابهة ، لذلك نقسم هذا العدد على عدد التبديلات الممكنة للنقاط والحواجز ، اي نقسم على حاصل ضرب التالي :  $(g_\nu - 1)!$  . وعليه ، يكون عدد الطرق المختلفة لوضع  $N_\nu$  جسيم متماثل في  $g_\nu$  مقصورة ( حجرة ) ، او بعبارة اخرى ، عدد الطرق المختلفة لتوزيع  $N_\nu$  فوتونا موجودا في فترة الوحدة الترددية التي تحوي على  $g_\nu$  نمطا ، كما يلي

$$W_\nu = \frac{(N_\nu + g_\nu - 1)!}{N_\nu! (g_\nu - 1)!} \quad (7.21)$$

كما يكون عدد الطرق الكلية  $W$  لترتيب كل الفوتونات المتواجدة في جميع الفترات الترددية مساويا لحاصل ضرب المقادير  $W_\nu$  ، او

$$W = \prod_\nu W_\nu = \prod_\nu \frac{(N_\nu + g_\nu - 1)!}{N_\nu! (g_\nu - 1)!} \quad (7.22)$$

باستخدام تقريب ستيرلنج

$$\ln x! \cong x \ln x - x \quad (7.23)$$

إذا كانت قيمة  $x$  كبيرة جدا ، نؤخذ لو غارتم طرفين معادلة (7.22) لنحصل على التالي

$$\ln W = \sum_{\nu} [(N_{\nu} + g_{\nu} - 1) \ln (N_{\nu} + g_{\nu} - 1) - N_{\nu} \ln N_{\nu} - (g_{\nu} - 1) \ln (g_{\nu} - 1)] \quad (7.24)$$

حيث ان الشرط اللازم للحصول على قيمة عظمى لأي دالة هو تساوي التغير في قيمة هذه الدالة بالصفر ، لذلك يجب تحقيق الشرط  $\ln W_{\nu} = 0$  حتى تكون قيمة  $W$  عظمى. وبتطبيق هذا الشرط على معادلة (7.24) ، نحصل على ما يلي

$$\delta(\ln W) = \sum_{\nu} [\ln (N_{\nu} + g_{\nu}) - \ln N_{\nu}] \delta N_{\nu} = 0 \quad (7.25)$$

(ملاحظة: اهمل الواحد الصحيح في هذه المعادلة ، لأن  $(N_{\nu} + g_{\nu}) \gg 1$ .)

لكي تكون معادلة (7.25) صحيحة ، يلزم تلاشي ما بداخل القوس لكل فترة ترددية متمركزة حول  $\nu$  ، وهذا يتحقق عندما تكون كل قيم  $N_{\nu}$  كميات مستقلة . مهما يكن ، لا تكون هذه القيم مستقلة فعليا ، حيث تكون طاقة الفوتونات الكلية  $E = N_{\nu} \sum h\nu$  ثابتة . لذلك ، نستخدم شرط وجوب ان ي كون التغير في هذه الطاقة الكلية مساويا للصفر . اي ،

$$\delta E = \sum_{\nu} h\nu \delta N_{\nu} = 0 \quad (7.26)$$

لأيجاد قيم  $N_{\nu}$  كدالة للتردد وبحيث تتحقق المعادلات (7.25-7.26) ، نستخدم طريقة مضاعفات لاكرانج غير المحددة *Lagrange's method of undetermined multipliers* ، وتتلخص هذه الطريقة رياضيا كالتالي:

نضرب معادلة الشرط (7.26) بثابت  $\beta$  (يحدد فيما بعد) ، ثم نساوي الناتج مع معادلة (7.25) ، وبذلك ، نحصل على التالي

$$\sum_{\nu} [\ln (N_{\nu} + g_{\nu}) - \ln N_{\nu} - \beta h\nu] \delta N_{\nu} = 0 \quad (7.27)$$

ثم نبحث عن قيمة  $\beta$  التي تجعل القوس في هذه المعادلة يساوي الصفر ، او

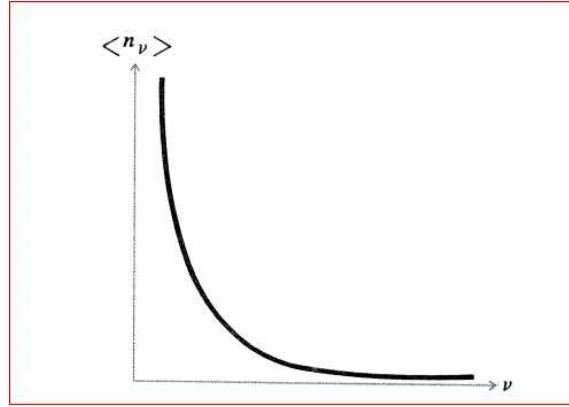
$$\ln (N_{\nu} + g_{\nu}) - \ln N_{\nu} - \beta h\nu = 0 \quad (7.28)$$

يعطي حل هذه المعادلة بالنسبة للمتغير  $N_{\nu}/g_{\nu}$  معامل الإشغال ويكون ما يلي

$$\langle n_\nu \rangle = \left( \frac{N_\nu}{g_\nu} \right)_{\max} = \frac{1}{e^{\beta h \nu} - 1} \quad (7.29)$$

فيزيائيا ، تمثل معادلة (7.29) التوزيع الخاص الذي يجعل قيمة  $W$  عظمى تحت شرط ثبات الطاقة الكلية  $E$  . وتعرف هذه المعادلة بتوزيع بوز – اينشتاين للفوتونات *Bose- Einstein Distribution* .

كما تعطي معادلة (7.29) معدل عدد الفوتونات لكل نمط كدالة للتردد وتمثل بيانيا كما في الشكل (7.7).



شكل (7.7) عدد الفوتونات/ وحدة فترة ترددية كدالة للتردد عند درجة حرارة معينة.

بتعويض معادلة (7.29) في معادلة (7.19) ، نحصل على التالي

$$I_\nu = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\beta h \nu} - 1} \quad (7.30)$$

وتعطي هذه المعادلة توزيع اشعاع الجسم الأسود المثالي كدالة للتردد .

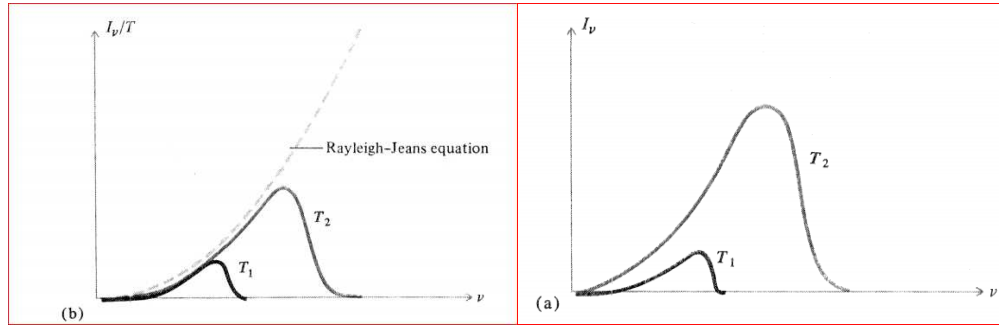
في حالة الترددات المنخفضة (  $\beta h \nu \ll 1$  ) ، يمكن استخدام الصورة التقريبية للدالة الأسية ، اي  $e^x \approx 1 + x$  ، وبالتعويض في معادلة (7.30) ، لنجد ان هذه المعادلة تؤول الى التالي:

$$I_\nu = \frac{2\pi \nu^2}{c^2} \frac{1}{\beta} \quad (7.31)$$

وهذه المعادلة تعرف بقانون ريلي - جينز ، حيث  $\beta = \frac{1}{kT}$  . وعليه ، يكون التوزيع الطيفي لإشعاع الجسم الأسود المثالي كما يلي

$$I_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (7.32)$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة بلانك ، وقد وجد ان نتائج هذه المعادلة تتفق تماما مع نتائج القياسات العملية. يوضح الشكل (7.8a) منحنيات  $I_\nu$  كدالة للتردد في حالات مختلفة من درجات الحرارة ، كما عرضت نفس البيانات للدالة  $(\frac{I_\nu}{T})$  مع المتغير  $\nu$  ( الشكل 7.8b ) ، وذلك للمقارنة بين المعادلة الكمية (7.32) مع قانون ريلي- جينز الكلاسيكي المعطى بالمعادلة (7.17) .



شكل (7.8) التوزيع الطيفي لإشعاع الجسم كدالة لدرجة الحرارة .

كما يمكن إستخدام قانون بلانك لإشتقاق قانون فين وقانون ريلي- جينز ، وذلك كالتالي لنفرض ان

$$x = \frac{h\nu}{kT} \quad (7.33)$$

وعليه ، تؤول معادلة بلانك الى ما يلي

$$I_\nu = \frac{2\pi k^3 T^3}{c^2 h^2} \frac{x^3}{e^x - 1} \quad (7.34)$$

لأيجاد القيمة العظمى للشدة الإشعاعية ( $I_\nu$ ) ، نفاضل معادلة (7.34) بالنسبة للمتغير  $x$  ثم نساوي الناتج بالصفر ، وبحل المعادلة الناتجة نجد ان القيمة العظمى تكون عند  $x = 2.82$  ، اي يكون التردد الأعظم كما يلي

$$\nu_{\max} = \frac{2.82 kT}{h} \quad (7.35)$$

وتمثل هذه المعادلة احدى الصور الرياضية لقانون فين .

كما نجد الأشعاع الكلي بواسطة التكامل على كل فترات التردد ، ويكون كالتالي

$$I = \int_0^{\infty} I_\nu d\nu = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (7.36)$$

بالرجوع الى جدول التكاملات ، نحصل على قيمة التكامل المحدود في معادلة (7.36) التي تعادل المقدار  $\pi^4/15$  ، وهكذا نحصل على قانون ستيفان – بولتزمان بالصورة الرياضية التالية:

$$I = \sigma T^4 \quad (7.37)$$

حيث يسمى  $\sigma$  ثابت ستيفان – بولتزمان ومقداره  $5.67 \times 10^{-8} \text{ watt/ m}^2/\text{ deg}^4$  ، ويعطى بالعلاقة

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} \quad (7.38)$$

## (7.7) الظاهرة الكهروϕونية *The Photoelectric Effect*

عمليا ، وجد ان سقوط الضوء على سطح معدني يسبب انبعاث الكترونتي من ذرات هذا السطح ، وتعرف هذه العملية بالظاهرة الكهروϕونية . وتستخدم هذه الظاهرة في تصميم وبناء عدة اجهزة لقياس وضبط شدة الضوء وغيرها ..

كما وجد ان هذه الإلكترونات الضوئية تنبعث بمدى واسع من الطاقات الحركية ، ولكن اذا كان الضوء الساقط على السطح المعدني احادي اللون *monochromatic* ، فإن هذه الإلكترونات تنبعث بطاقة حركية محددة وذات قيمة اكبر من القيمة العظمى ( $E_{\max}$ ) لمقدار الطاقة المحدد في العلاقة التالية

$$E_{\max} = h\nu - e\phi \quad (7.39)$$



حيث  $h$  ثابت بلانك ،  $e$  شحنة الإلكترون ، اما مقدار الثابت  $\phi$  يتوقف على نوع المعدن المستخدم في هذه العملية ، ويسمى دالة شغل  $work\ function$  المعدن ، وفي اغلب المعادن ، تكون قيم هذه الدالة من رتبة بضعة فولتات ، كما تمثل الكمية  $e\phi$  الشغل اللازم لتحرير الكترونات السطح ، بوحدة الكترون فولت  $electron\ volt$  .

وفقا للمعادلة (7.39)، لا تعتمد طاقة الإلكترونات المنبعثة من السطح على شدة الضوء الساقط عليه ، بل تعتمد على تردد هذا الضوء. كما وجد عمليا ، ان شدة التيار الضوئي يختلف باختلاف شدة الضوء الساقط. وبعبارة اخرى ، يمكن القول ان عدد الإلكترونات الضوئية المنبعثة لكل ثانية تتناسب طرديا مع المعدل الزمني لعدد الفوتونات التي تسقط على هذا السطح .

اذا كانت شدة الضوء الساقط ذات قيمة منخفضة لدرجة ما ، عندها يمكن احصاء الإلكترونات المنبعثة بشكل انفراديا  $individual$  . حيث ان طاقة الإلكترون الضوئي تعطى بالمعادلة (7.39) ، لذلك يمكن الإستنتاج ان كل فوتون واحد ينقل الطاقة الى الكترون واحد فقط . ويترتب على ذلك امكانية الكشف  $detection$  عن هذه الفوتونات بشكل انفرادي باستخدام هذه الظاهرة .

### (7.8) زخم الفوتون – ضغط الإشعاع الضوئي $Momentum\ of\ Photon - Light\ Pressure$

وفقا لنتائج النظرية الكهرومغناطيسية ، اذا سقط شعاع ضوئي ، بانشعاعية  $I$  ، على سطح اسود ، فإن ذلك يعرض السطح لضغطا مقداره  $I/c$  ، ونتيجة لضعف هذا الضغط على السطح ، يكون من اللازم استخدام اجهزة حساسة جدا للكشف عن هذا الضغط . وفقا للطبيعة الكمية للضوء ، فإن سبب هذا الضغط يعزى الى امتلاك الفوتونات زخما وطاقة . ولتحديد زخم الفوتون ، نفترض صحة العلاقة بين الكتلة والطاقة في النظرية النسبية لأينشتاين ، او

$$h\nu = mc^2 \quad (7.40)$$

حيث ،  $c$  سرعة الضوء في الفراغ ،  $m$  كتلة الفوتون .

وعليه ، وفقا لمبادئ الميكانيكا الكلاسيكية ، يكون الزخم الخطي للفوتون والذي يتحرك بسرعة الضوء ،  $p$  ، كما يلي

$$p = mc = \frac{h\nu}{c} \quad (7.41)$$

كما يمكن التعبير عن هذا الزخم بدلالة طول موجة الضوء ، باستخدام معادلة (7.41) ، كما يلي

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (7.42)$$

لنفرض ان سيلا من الفوتونات تسقط عموديا على سطح تام الإمتصاصية ،  $N$  يمثل عدد الفوتونات الساقطة على وحدة المساحة العمودية في الثانية الواحدة ، يكون الضغط  $P$  ( المعدل الزمني لإنتقال الزخم الخطي لكل وحدة من هذه المساحة ) كما يلي

$$P = \frac{N h \nu}{c} \quad (7.43)$$

وعليه ، تكون الإشعاعية  $I$  (القدرة لكل وحدة مساحة ) باعتبار ان كل فوتون يحمل طاقة  $h\nu$  كما يلي

$$I = N h \nu \quad (7.44)$$

وتبعا ، يكون الضغط

$$P = \frac{I}{c} \quad (7.45)$$

وتتفق هذه النتيجة مع العلاقة الكلاسيكية للضغط .

اما اذا كان السطح تام الانعكاسية ، فإن الضغط في هذه الحالة يكون مساويا لضعف المقدار المعطى في معادلة (7.45) ، اي ،  $2I/c$  . ويمكن تفسير ذلك على اساس ان التغير في زخم الفوتون المنعكس عن السطح يساوي  $\Delta p = p - (-p) = 2p$  ، وهذا يضاعف الضغط المؤثر على هذا السطح .

### (7.9) الزخم الزاوي للفوتون *Angular Momentum of a Photon*

وفقا لنتائج النظرية الكهرومغناطيسية الكلاسيكية ، اذا سقط شعاع مستقطب دائريا على سطح ممتص ، فإن هذا السطح يتأثر بإزدواج *Torque*. ويكون مقدار هذا الإزدواج المؤثر ،  $\mathcal{T}$  ، على وحدة مساحة كالتالي

$$\mathcal{T} = \frac{I}{2\pi\nu} = \frac{I}{\omega} \quad (7.46)$$

حيث  $I$  هي انشعاعية الضوء الساقط على السطح .

من وجهة نظر معادلة (7.44) ، يمكن التعبير عن معادلة (7.46) بصورة اخرى :

$$\mathcal{T} = \frac{N h}{2\pi} \quad (7.47)$$

نستنتج من هذه المعادلة ان للفوتونات زخما زاويا *angular momentum* اضافة الى زخمها الخطي . ويسمى هذا الزخم الزاوي الذاتي باللف ( الغزل ) *spin* ، وان قيمة اللف للفوتون تساوي  $h/2\pi$  . كما يكون اتجاه لف الفوتون مواز لإتجاه انتشار الضوء في حالة الضوء المستقطب دائريا يمينا ، بينما يكون هذا الإتجاه مضاد لإتجاه انتشار الضوء في حالة الضوء المستقطب دائريا يساريا . وبما انه يمكن اعتبار الضوء المستقطب خطيا ، او غير المستقطب ، مزيجا mixture من الضوء المستقطب دائريا يمينا ويساريا ، فإن مقدار الزخم الخطي يكون فرا . وفي حالة الضوء المستقطب

خطيا ، يكون هذا المزيج الضوئي متطاورا *coherent* ، بينما يكون هذا المزيج غير متطاورا *incoherent* في حالة الضوء غير المستقطب.

### (7.10) طول موجة الجسيمات المادية – فرضية دي برولي

#### *Wavelength of Material Particles – De Broglie Hypothesis*

في عام 1924 ، افترض العالم الفيزيائي الفرنسي ، دي برولي ، ان الضوء يظهر خصائصا موجية *wavelike* وخصائص جسيمات مادية *particle like* ، او بعبارة اخرى ، ان للجسيمات المادية سلوكا موجيا .

باعتبار الصورة الرياضية لزخم الفوتون ،  $p = h/\lambda$  ، اقترح دي برولي ان هذه الصورة يمكن تطبيقها على الجسيمات المادية . اي ، كل جسم كتلته  $m$  يتحرك بزخم خطي ،  $p = mu$  ، يصاحبه موجة طولها كما يلي

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mu} \quad (7.48)$$

ولتحقيق صحة فرضية دي برولي ، في عام 1927 ، أجرى العالمان : دافيسون *Davisson* و جيرمر *Germer* تجربة تتعلق بسقوط شعاع الكتروني على بلورة ما، وكانت النتيجة ان هذا الشعاع ينعكس بطريقة مماثلة لإنعكاس الضوء في حالة محزوزة الحيود *diffraction grating* . اذ وجدا ان هذه الإلكترونات تنعكس بزوايا محددة ، تساوي في مقاديرها نفس قيم الزوايا التي يعطيها قانون محزوز الحيود الضوئي ، وهي كالتالي

$$n\lambda = d \sin \theta \quad (7.49)$$

حيث  $n$  عدد صحيح ،  $d$  المسافة بين صفوف ذرات البلورة .

من نتائج هذه التجربة ، وجد العالمان دافيسون و جيرمر ان طول موجة الإلكترونات تتفق بشكل تام مع طول موجة دي برولي (معادلة 7.48) .

وبعد ذلك ، اجري كثير من العلماء تجاريا للتحقق من صحة فرضية دي برولي ، باستخدام جسيمات مختلفة ، البروتونات ، النيوترونات ، ذرات بسيطة، وجزينات ، وادت هذه التجارب الى ما يلي:

**يكون للضوء والجسيم المادي طبيعة ثنائية *DUAL NATURE*** ، وبعبارة اخرى ، يمكن القول ان طبيعة الضوء تكون بصورة موجية او بصورة جسيمية ، وذلك حسب حالة التجربة ، فمثلا ، يمكن تفسير ظواهر التداخل والحيود الضوئي وفقا لطبيعة الضوء الموجية ، بينما يمكن تفسير الظاهرة الكهروضوئية وفقا لطبيعة الضوء الجسيمية . كما انه يمكن الإستنتاج ان لتفسير سلوك المادة او الإشعاع لا يكون النموذج الجسيمي ولا النموذج الموجي صحيحين بشكل دقيق .

## (7.11) قاعدة هيزنبرغ في اللاتحديد *Heisenberg's Uncertainty Principle*

من اهم الأفكار الفيزيائية التي ادخلت على مفاهيم الفيزياء الحديثة في عام 1927، هي مبدأ اللاتحديد ( الشك او عدم اليقين ) *uncertainty principle*، وكانت مقدمة من العالم هيزنبرغ ، وتتعلق هذه القاعدة بمعرفة نهاية الدقة في قياس الأنظمة الفيزيائية . وتنص هذه القاعدة على التالي: اذا كان هناك متغيران مترافقان *two conjugate variables* من قياسات الميكانيكا الكلاسيكية مثل  $\{ P, Q \}$  ، فإن القيم اللحظية لهما لا يمكن قياسها ( معرفتها) لحد ما من الدقة اكبر من تلك التي تعطيها العلاقة التالية :

$$\Delta P \Delta Q \approx h \quad (7.50)$$

حيث  $h$  ثابت بلانك .

ومن الأمثلة على الكميات الفيزيائية المترافقة في الميكانيكا الكلاسيكية : ( الطاقة ، الزمن ) ، ( الموقع ، الزخم ) للجسيم المتحرك ، ( الزاوية ، العزم الزاوي) لحركة الأجسام الدورانية .

لبيان كيفية تطبيق هذا المبدأ على الكوانتا الضوئية ( الفوتون ) ، نورد المثال التالي: على فرض اننا نريد تحديد الدقة في قياس طاقة الفوتون ( او تردده) ، نعتبر ان هذا القياس قد تم في خلال فترة زمنية محددة  $(\Delta t)$  وهي فترة تشغيل الغالق الضوئي *optical shutter* ، فاذا كان الضوء احادي اللون ( ذو خط طيفي حاد *sharp* ) فإن استمرارية نبضة الضوء تساوي هذه الفترة الزمنية ، ويعني ذلك ان مقدار التردد المقابل يمتد *spread* في تحليل فورييه للنبضة *Fourier pulse spectra analysis* بمقدار يعطى كما يلي

$$\Delta \nu \Delta t \approx 1 \quad (7.51)$$

كما يمكن اعادة كتابة هذه العلاقة كالتالي

$$\Delta(h\nu) \Delta t \approx h \quad (7.52)$$

اي ،

$$\Delta E \Delta t \approx h \quad (7.53)$$

فيزيائيا ، تعني الكمية  $\Delta E$  مقدار عدم الدقة ( الشك ) في قياس طاقة الفوتون ، المقابل لمقدار عدم الدقة في تردد هذا الفوتون  $(\Delta \nu)$  . وعليه لا يمكن قياس طاقة الفوتون بدقة مطلقة *absolute precision* ما لم يكن مقدار الفترة الزمنية مالانهاية *infinite* . وبالمقابل ، لا يمكن معرفة زمن مغادرة هذا الفوتون الغالق بدقة  $(t)$  ما لم تكن راغبين في ترك كل المعرفة المتعلقة بتردد هذا الفوتون ( او طاقته المكافئة لهذا التردد) .

وفي اي حالة ، يمكن التعبير عن الصورة الرياضية لمبدأ هيزنبرغ في اللاتحديد كما يلي: لا يمكن ان يكون  $\Delta x$  و  $\Delta p$  **عدم الدقة للطاقة ( الخطأ في قياس الطاقة ) بعدم الدقة في الزمن ( الخطأ في قياس الزمن ) اقل من مقدار  $h$**  .

ومن استخدامات هذه القاعدة ما يتعلق بتحديد موقع الفوتون *position* ، لنفرض ان فترة عمل الغالق الضوئي هي  $\Delta t$  ، وان اتجاه حركة الفوتونات المنبعثة هو في اتجاه محور  $x$  . لذلك ،

$$\Delta x = c \Delta t \approx \frac{c}{\Delta \nu} \quad (7.54)$$

باستخدام معادلة (7.42) ، نحصل على التالي

$$\Delta p = \frac{h \Delta \nu}{c} \quad (7.55)$$

وعليه ،

$$\Delta x \Delta p \approx h \quad (7.56)$$

هذا يعني اننا لا نستطيع معرفة القيمة اللحظية لموقع الفوتون وزخمه لدرجة اعتباطية من الدقة *accuracy*. اي اذا عرفنا زخم الفوتون بدقة اعتباطية ( كيف ما نشاء ) ، فإننا لا نعلم شيئا عن موقعة ، والعكس صحيحا .

كما تبين قاعدة هيزنبرغ في اللاتحديد **النقص *inadequacy*** في وصف الفوتون كجسيم مادي. بمعنى ، اذا وصفنا بشكل دقيق موقع الفوتون ، زمانيا ومكانيا ، فإن هذا الوصف يفقد معناه لأن زخم وطاقة هذا الفوتون تصبحان غير محدودتين بشكل تام .

## تمارين

- (7.1) جد عدد الأنماط الممكنة في صندوق مكعب طول ضلعه 10 cm في حالة الفترات التالية :
- (a) تردد  $10^3$  Hz متمركز عند طول الموجة 500 nm . (b) طول موجة  $1A^0$  متمركز عند 5000 nm ؟
- (7.2) جد عدد الفوتونات في الصندوق المعطى في المسألة السابقة للفترات المعطاة عند درجة حرارة التالية:
- (a) 300 K (b) درجة حرارة الشمس 6000K ؟
- (7.3) يعمل مصباح تنجستون عند درجة حرارة 1800 K ، جد عدد الفوتونات المنبعثة من الفتيل في الثانية الواحدة في الفترة [ 5001A - 5000 A ] ، اعتبر الفتيل كجسم اسود .
- (7.4) جد عدد الفوتونات لكل نمط في الفجوة عند درجة حرارة 300 K ، 6000K ، لأطوال الموجات التالية : (a) 5000 nm (b) 5 mm ؟
- (7.5) احسب العدد الكلي للفوتونات لجميع الترددات في فجوة حجمها V وعند درجة حرارة T ؟
- (7.6) احسب العدد الكلي للفوتونات / وحدة مساحة في الثانية الواحدة والمنبعثة من جسم اسود درجة حرارته T ؟
- (7.7) عبر عن قانون بلانك للإشعاع بدلالة القدرة / وحدة مساحة في فترة الوحدة الترددية ؟
- (7.8) جد طول موجة الإشعاع العظمى لكل فترة وحدة من طول الموجة ؟
- (7.9) اذا كان اتساع خط شعاع الليزر يساوي  $10^3$  Hz ، وطول موجته 6328 A ، وقدرته 1mW ، جد المعدل الزمني لإنبعاثات الفوتونات في هذا الشعاع ؟
- (7.10) اشتق المعادلة التي تمثل الضغط على جدران فجوة مكعبة عند درجة حرارة T ، بفعل وجود الفوتونات داخل هذه الفجوة . ( اعتبر ان ثلث عدد الفوتونات فقط يساهم في توليد هذا الضغط ، اي تلك التي تتحرك في اتجاه x ) ؟
- (7.11) اعتمادا على المسألة (7.10) ، جد درجة الحرارة التي تجعل الضغط على الجدران يعادل  $10^{-3}$  ضغط جوي

(7.12) يتركز شعاع من الليزر في بقعة قطرها  $1 \mu m$  ، فإذا كانت قدرة هذا الشعاع تساوي  $10 W$  ، جد مقدار الضغط الواقع على هذه البؤرة ؟

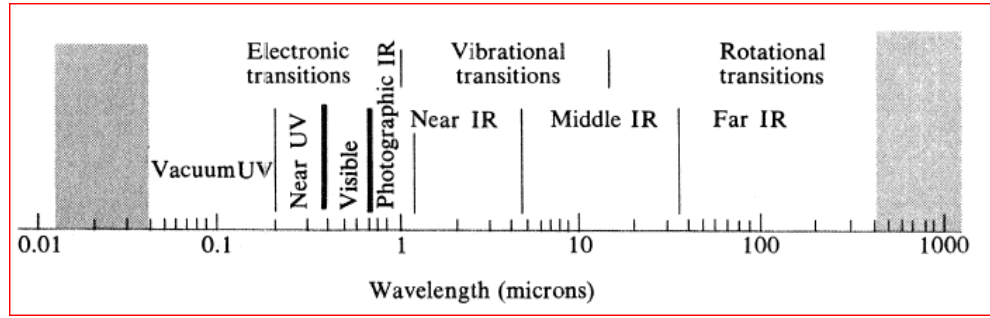
---

## الفصل الثامن : الأطياف الضوئية Optical Spectra

نتاول في هذا الفصل دراسة الأطياف الذرية من خلال شرح معادلة شرودنجر وحل هذه المعادلة الذي يعطي اساسيات ميكانيكا الكم ، ونطبق هذا الحل على ذرة الهيدروجين . كما ندرس التركيب الدقيق لطيف هذه الذرة ، و كذلك نتناول دراسة اطياف الذرات ذوات الإلكترونات الكثيرة واطياف الجزيئات .

### (8.1) مقدمة Introduction

يعرف الطيف *spectrum* بأنه ترتيب تصاعدي ( او تنازلي ) لتردد ( او طول موجة ) الإشعاع الكهرومغناطيسي . ويتألف الطيف الكامل لضوء مصدر ما من جميع الترددات المنبعثة من هذا المصدر . حيث انه لا يوجد اي اداة عالمية لتحليل التردد لهذه الأطياف المتنوعة ، لذلك يجب التحري عن كل منطقة على حدى من مناطق الطيف المتنوعة بطرق مختلفة . في البند (1.4) ، تمت الإشارة بشكل مختصر الى المناطق الرئيسية لهذا الطيف ، اذ ان المنطقة الضوئية المرئية تمتد على مدى واسع في هذا الطيف ، حيث تقع الأشعة تحت الحمراء (*IR infrared*) في احد طرفي هذه المنطقة ، بينما تقع الأشعة فوق البنفسجية (*UV ultraviolet*) عند الطرف الآخر لهذه المنطقة ( الشكل 8.1) .



شكل (8.1) المنطقة الضوئية في الإشعاع الكهرومغناطيسي .

وتتميز المنطقة الضوئية بما يلي : (1) يمكن تركيز ، توجيه ، والسيطرة على الإشعاع المرئي بإستخدام المرايا والعدسات . (2) كما يمكن تفريق *dispersing* هذا الإشعاع بإستخدام المناشير ومحزوزات الحيود .

وبخلاف **الطيف المتصل** *continuous* للإشعاع الحراري المنبعث من الأجسام الصلبة ، وجد ان الإشعاع المنبعث من الذرات او الجزيئات المثارة يتكون من ترددات **متقطعة ( منفصلة )** *discrete* ، وتتميز هذه الترددات وفقا لأنواع الذرات او الجزيئات التي تصدر هذه الأشعاعات ، ويسمى هذا الطيف الأشعاعي **بالطيف الخطي** *line spectrum* . ويعود اصل هذا المصطلح اللغوي الذي يعزى الى استخدام فتحة الشق الضيق امام المصدر في جهاز المطياف . مما ينتج عن ذلك صورة على شكل خط في المستوى البؤري للموجات المختلفة والمكونة لهذا الإشعاع . ومن المصادر الضوئية التي لها طيف خطي : القوس الكربوني ، الأنابيب التفريغ الغازية .



عمليا ، تكون الأطياف الضوئية لمعظم الذرات معقدة تماما وانماطها الخطية تكون عشوائية المظهر ، بينما نجد ان بعض العناصر ( الهيدروجين ، المعادن القلوية ) تعطي اطيافا بسيطة نسبيا وتكون على شكل سلاسل من الخطوط *series of lines* ( كما سيرد شرحه لاحقا ).

عند تحليل الأطياف الضوئية لمعظم الجزيئات (ثنائية الذرات ) باستخدام اجهزة المطياف ، نجد ان هذه الأطياف تكون على شكل اشربة *bands* تفصلها عن بعض مسافات متباينة . اما اذا كانت القدرة التحليلية للمطياف المستخدم عالية جدا ، فإن كل شريط يظهر على شكل عدة خطوط متقاربة المسافة .

كما وجد عمليا ، ان تمرير الضوء الأبيض المركب ( المكون من عدة ألوان ، مثل ضوء الشمس ) خلال بعض الغازات او الأبخرة غير المثارة يؤدي الى امتصاص بعض خطوط الطيف الضوئي ، وتكون مواقع هذه الخطوط ( الترددات ) في نفس مواقع الأشعاع الصادر من ذرات هذه الأبخرة فيما لو كانت مثارة . ويسمى هذا الطيف بطيف الإمتصاص *absorption spectrum* . ويظهر مكان الخطوط الطيفية الممتصة خطوطا سوداء ، وكان العالم فرونهوفر اول من لاحظ هذه الظاهرة عند تحليله للضوء القادم من الشمس ، كما أجرى قياسات كمية لهذه الأطياف . وتدل هذه الخطوط على وجود طبقة غازية باردة في الغلاف الجوي العلوي للشمس، حيث تمتص الذرات في هذا الغلاف الموجات الخاصة بها من الضوء القادم من سطح الشمس الساخن ( 5500 K ) .

كما يحدث هذا الإمتصاص الإنتقائي *selective absorption* لطيف الضوء النافذ من خلال بعض البلورات الملونة والأوساط الزجاجية المحتوية على شوائب، مثل ذرات عناصر الأرض النادرة.

## (8.2) نظرية الأطياف الذرية الابتدائية *Elementary Theory of Atomic Spectra*

في عام 1913 ، وضع العالم نيل بور *Neil Bohr* النظرية الرياضية للأطياف الذرية ، والتي كانت معينة بالتفسير النظري لطيف الهيدروجين ، مع انه يمكن تطبيق افكاره الأساسية على أنظمة اخرى عدا ذلك . لتفسير حقيقة انبعثات الإشعاع من الذرات بترددات خصائص معينة ، ادخل بور فرضيتين أساسيتين هما :

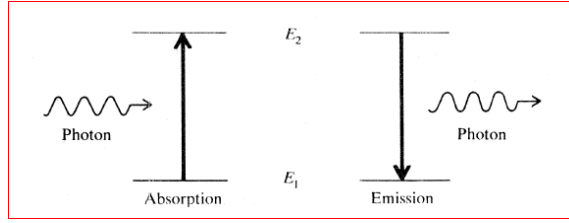
- (1) تتواجد الإلكترونات في ذرات المادة فقط في حالات مكممة من المستويات المنفصلة ( مدارات *orbits* ) ، وتكون طاقات هذه الحالات مختلفة ، وتعرف الحالة ذات الطاقة الدنيا بالحالة الأرضية *ground state* .
- (2) يتم انتقال الإلكترون من حالة الى أخرى بإمتصاص او انبعث اشعاع ما ، ويكون تردد هذا الإشعاع كالتالي

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} \quad (8.1)$$

حيث  $\Delta E$  تمثل فرق طاقة الحالتين التي حدثت بينهما عملية هذا الانتقال الإلكتروني .

فعليا ، تمثل هاتان الفرضيتان انقلابا على النظرية الكلاسيكية ( افكار نيوتن الذرية ) ، حيث الفرض الأول يقترح تكميم اشعاع الفجوة والمقترح بواسطة بلانك ، بينما يعبر الفرض الثاني عن ان الذرة تبعث ( او تمتص ) فوتونا واحدا فقط وذلك

عندما تنتقل حالتها الكمية من حالة الى أخرى . وتكون طاقة هذا الفوتون مساوية لفرق الطاقة بين الحالتين ( الشكل 8.2)



شكل (8.2) مخطط عمليات الإمتصاص و الإنبعاث .

### ذرة بور وطيف الهيدروجين :

حصل بور على علاقة رياضية التي تعطي تحديدا لمستويات الطاقة في الذرات بشكل صحيح وذلك بإدخال فرضية اساسية تتعلق بالزخم الزاوي والتي تنص على ما يلي :

يكون مقدار الزخم الزاوي للإلكترون دائما عددا صحيحا من مضاعفات الكمية  $h/2\pi$  ، حيث  $h$  ثابت بلانك . ويمكن التعبير عن هذه الفرضية رياضيا كما يلي:

لنفرض ان الكترونا ما كتلته  $m$  يدور في مسار دائري نصف قطره  $r$  بسرعة  $u$  . لذلك ، تكون الصورة الرياضية لفرضية بور كما يلي

$$mur = \frac{nh}{2\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (8.2)$$

فيزيائيا ، تعبر هذه العلاقة عن ان الزخم الزاوي المداري للإلكترون يكون **مكمما** *quantized* . كما يسمى العدد الصحيح  $n$  **الرقم الكمي الرئيسي** *principal quantum number* .

يمكن الحصول على معادلة القوة الكلاسيكية لهذا الإلكترون الذي يدور في مسار دائري مركزه البروتون بمساواة القوة الكهربائية مع القوة المركزية الناتجة من الدوران ، او :

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mu^2}{r} \quad (8.3)$$

بتعويض قيمة  $u$  من معادلة (8.2) في معادلة (8.3) ، نحصل على نصف قطر المدار الكمي . اي ،

$$r = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2 = a_H n^2 \quad (8.4)$$

يسمى اصغر نصف قطر مدار (  $n = 1$  ) **بنصف قطر بور الأول** ، ويشار اليه بالرمز  $a_H$  ، ويكون مقداره كالتالي:

$$a_H = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 0.529 \text{ \AA} \quad (8.5)$$

كما يمكن التعبير عن انصاف اقطار المدارات الأخرى بدلالة نصف قطر بور الأول كالتالي :

$4 a_H, 9 a_H \dots \dots etc$  . كما يمكن ايجاد الطاقة الكلية للمدار بجمع الطاقة الحركية وطاقة الوضع معا، تحديدا ،

$$E = \frac{1}{2} m u^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (8.6)$$

باستخدام معادلة (8.3) لحذف  $u$  ، نحصل على التالي

$$E = - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (8.7)$$

هذه نفس قيمة طاقة الإلكترون المقيد *bound electron* الكلاسيكية. اذا كانت جميع قيم  $r$  مسموحا بها فإن اي قيمة للطاقة ( بما فيها القيم السالبة ) تكون ممكنة. ولكن بما ان المدارات مكتمة وفقا لمعادلة (8.4) ، لذلك تكون قيم الطاقات المكتمة لهذه المدارات كما يلي:

$$E_n = - \frac{R}{n^2} \quad (8.8)$$

حيث يعطى الثابت  $R$  ( ثابت رايديبيرغ *Rydberg constant* ) بالعلاقة التالية :

$$R = \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \quad (8.9)$$

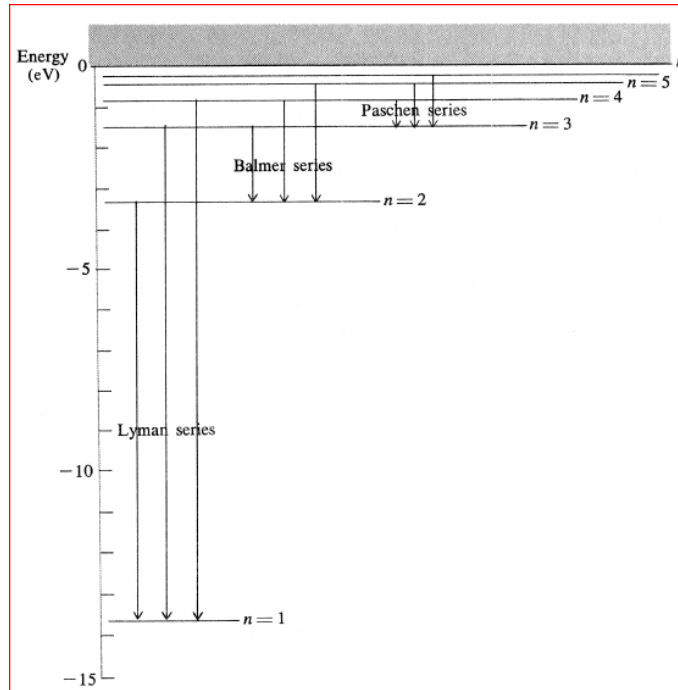
ويمثل **طاقة ربط** *binding energy* الإلكترون في الحالة الأرضية ، ومقدارها يساوي 13.5 eV تقريبا .

كما نحصل على قانون التردد لاطيف الهيدروجين بدمج معادلة الطاقة (8.8) مع شرط بور للتردد ، حيث نفرض ان طاقات المدارين  $n_1, n_2$  هي  $E_1, E_2$  على الترتيب . لذلك ،

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h} = \frac{R}{h} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (8.10)$$

حيث:  $R/h = 3.29 \times 10^{15} \text{ Hz}$ . يوضح الشكل (8.3) المخطط الإنتقالي للإلكترونات في بين مستويات الطاقة في ذرة الهيدروجين، كما تعرف سلسلات *series* خطوط الطيف وفقا لأسماء الفيزيائيين الذين بحثوا في هذا المجال. وتكون هذه المجموعات الطيفية كما يلي:

$n_1 = 1$	$n_2 = 2, 3, 4, \dots$	Lyman series (far ultraviolet)
$n_1 = 2$	$n_2 = 3, 4, 5, \dots$	Balmer series (visible and near ultraviolet)
$n_1 = 3$	$n_2 = 4, 5, 6, \dots$	Paschen series (near infrared)
$n_1 = 4$	$n_2 = 5, 6, 7, \dots$	Brackett series (infrared)
$n_1 = 5$	$n_2 = 6, 7, 8, \dots$	Pfund series (infrared)



شكل (8.3) مستويات طاقة ذرة الهيدروجين ، وانتقالات الإلكترونات في اول ثلاث سلسلات .

باستخدام انبوبة تفريغ الهيدروجين كمصدر للضوء خلال مطياف صغير *spectroscope* ، يمكن مشاهدة الخطوط الثلاثة الأولى في مجموعة بالمر ، وتكون اطوال موجاتها كالتالي: 4340 ، 4861 ، 6563 انجستروم .

عمليا ، يلاحظ تتضائل شدة الخطوط في من المجموعات الطيفية السابقة مع زيادة قيمة  $n_2$  . اضافة الى ذلك ، تنقص هذه الشدات مع زيادة  $n_1$  . عادة يستخدم علماء الأطياف الذرية معادلة (8.10) بصورة رياضية جديدة على النحو التالي

$$\sigma = \frac{\nu}{c} = \mathcal{R} (n_1^{-2} - n_2^{-2})$$

حيث  $\sigma$  العدد الموجي الطيفي *spectroscopic wave number* ،  $\mathcal{R}$  ثابت ريديبيرغ بوحدات العدد الموجي ، تحديدا ،

$$\mathcal{R} = \frac{R}{ch} = 10,973,731 \text{ m}^{-1}$$

كما يعتبر طيف الهيدروجين ذو اهمية خاصة في دراسة علم الفلك . وبما ان هذا العنصر متوفر بكثرة في الكون ، فإن اطيف معظم النجوم تظهر ان مجموعة خطوط **بالمر** هي خطوطا امتصاصية بارزة .

#### ▪ تأثير كتلة النواة المحددة *Effect of a Finite Nuclear Mass*

عند اشتقاق معادلة (8.9) لأيجاد قيمة ثابت ريديبيرغ ، اعتبرنا ان كتلة النواة لانهاية *infinite* . عمليا ، تكون كتلة النواة محدودة ، كما لا يدور الإلكترون حول النواة كمرکز للمدار وانما يكون دوران كلا من الإلكترون والنواة حول مركز ثقلهما المشترك . ولذلك ، حتى نحصل على قيمة دقيقة لثابت رايدبيرغ يجب استبدال كتلة الإلكترون  $m$  بكتلة اخرى تسمى الكتلة المختصرة  $\mu$  في المعادلة (8.9) ، او

$$R_H = \frac{\mu e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \quad (8.11)$$

حيث

$$\mu = \frac{mM}{m + M} \quad (8.12)$$

،  $M$  تمثل كتلة النواة.

في حالة ذرة الهيدروجين العادي ذات البروتون الواحد ، تكون نسبة الكتل ( $M / m$ ) تعادل 1836. بينما في ذرة نظير الهيدروجين الثقيل (ديتيريوم) تتضاعف هذه النسبة . وعليه ، تتغير قيمة ثابت رايدبيرغ عن قيمتها العادية للهيدروجين

العادي . وعليه ، يوجد اختلاف بسيط لقيم الترددات المقابلة لخطوط الطيف لهذين النظيرين . تسمى هذه الظاهرة بالإنزياح النظيري *isotope shift* . عمليا ، يمكن مشاهدة هذه الظاهرة على شكل تضاعفي *doubling* لخطوط الطيفية في أنابيب التفريغ الغازية والتي يستخدم فيها خليطا من غازي الهيروجين والديتيريوم .

### (8.3) مبادئ ميكانيكا الكم *Quantum Mechanics Principles*

تطورت نظريات الميكانيكا الكمية على يد العلماء شرودنجر ، هيزنبرغ ، وغيرهم منذ عام 1920 . اذ وضعت عدة نظريات تتعلق بوصف الانظمة الذرية بدلالة دالة موجية (دالة الحالة) *wave function (state function)* ، والتي يعبر عنها بالرمز  $\Psi$  ، وعادة ، تكون هذه الدالة بصورة عددا مركبا *complex number* ودالة لجميع الإحداثيات الترتيبية للنظام المعبر بما في ذلك الزمن .

من احد المبادئ الأساسية لميكانيكا الكم ، فرضية ان مربع القيمة المطلقة لدالة الموجة ،  $|\Psi|^2$  ، او  $\Psi^*\Psi$  ، هو مقياسا لإحتمالية *probability* موقع ترتيب النظام المقابل لقيم الإحداثيات المعينة . وتسمى الكمية  $\Psi^*\Psi$  دالة التوزيع الإحتمالي *probability distribution function* او *كثافة الاحتمال probability density* .

مثلا ، اذا كان نظاما ما مكونا من الكترون واحد بإحداثيات  $x, y, z$  ، فإن احتمالية تموضع هذا الإلكترون بين  $\{(x, x + \Delta x), (y, y + \Delta y), (z, z + \Delta z)\}$  تكون كما يلي

$$\Psi^*(x,y,z,t)\Psi(x,y,z,t) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (8.14)$$

فيزيائيا ، توضح هذه العلاقة اننا لا يمكن تحديد مكان الإلكترون بالضبط ، وانما يمكن تواجده ضمن فترة مكانية محددة ، وهذا يتوافق مع مبدأ اللاتحديد (الشك) لهيزنبرغ (البند 7.11). وعليه ، تكون الإحتمالية الكلية لتواجد هذا الإلكترون في اي موقع ضمن الفراغ يجب ان يساوي الوحدة *unity* ، تحديدا ،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*\Psi dx dy dz = 1 \quad (8.15)$$

تعرف هذه الدوال التي تحقق صحة المعادلة (8.15) بالدوال المتكاملة والمعايرة *integrable , normalized functions* .

#### ■ الحالات المستقرة ( الساكنة ) *Stationary states*

تسمى الحالة الكمية المقابلة للطاقة المعرفة بشكل كامل بالحالة الذاتية *Eigenstate* . وعادة ، يكون لأي نظام عدة حالات ذاتية ، وكل حالة تملك طاقة مختلفة . لنفرض ان  $E_n$  تشير الى طاقة النظام الخاصة عندما يكون في احد حالاته الذاتية ، لذلك يكون الإعتدال الزمني لدالة الحالة ممثلا بعامل على شكل دالة أسية مركبة ،  $e^{(-iE_n t/h)}$  ، حيث:  $\hbar = h/2\pi$  . وتباعا ، تكون دالة الحالة الكاملة ( المعرفة بالمكان والزمان ) كما يلي

$$\Psi_n(x,y,z,t) = \Psi_n(x,y,z) e^{-iE_n t/\hbar} \quad (8.16)$$

حيث  $\psi_n$  تمثل دالة الإحداثيات الترتيبية للنظام فقط . وعليه ، تكون كثافة الاحتمال للنظام في هذه الحالة الذاتية كما يلي:

$$\Psi_n^* \Psi_n = \psi_n^* e^{iE_n t/\hbar} \psi_n e^{-iE_n t/\hbar} = \psi_n^* \psi_n \quad (8.17)$$

هذه المعادلة تعني ان توزيع الاحتمالية يكون ثابتا مع الزمن ، او مستقرا . فيزيائيا ، يكون النظام في الحالة المستقرة نظاما ساكنا *static system* ، بمعنى انه لا تجري فيه اي تغيرات على الإطلاق بالنسبة للمحيط الخارجي .

في الحالة الخاصة التي يكون فيها النظام الميكانيكي الكمي هو ذرة ما ( مكونة من النواة والإلكترونات المحيطة بها ) ، تكون دالة التوزيع الاحتمالي هي فعلا مقياسا لمعدل كثافة الإلكترون عند نقطة معينة في الفراغ . واحيانا يشار لهذه الحالة بسحابة الشحنة *charge cloud* . فاذا كانت الذرة في حالة الاستقرار ، فإن كثافة الإلكترون تكون ثابتة مع الزمن ، ويكون المجال الكهرومغناطيسي المحيط بها ساكنا ولا ينبعث من هذه الذرة اي اشعاع.

### ■ الحالات المتطورة *Coherent States*

نفرض ان نظاما ما يتغير من الحالة الذاتية  $\psi_1$  الى حالة ذاتية اخرى  $\psi_2$  . خلال عملية الإنتقال هذه ، تعطى دالة الحالة بصورة التراكب الخطي للدوال الذاتية للحالتين السابقتين ، اي

$$\Psi = c_1 \psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + c_2 \psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar} \quad (8.18)$$

حيث  $c_1$  ،  $c_2$  معاملات تتغير ببطء شديد بالنسبة للعامل الزمني للدالة الأسية . وتسمى الحالة المذكورة اعلاه بالحالة المتطورة *coherent state* . من احد الفروق الجوهرية بين الحالة المتطورة والحالة المستقرة هو ان طاقة الحالة المتطورة تكون غير معرفة بشكل حسن *well defined* ، بينما في المقابل ، تكون طاقة الحالة المستقرة معرفة تعريفا حسنا .

باستخدام معادلة (8.18) ، نجد ان التوزيع الاحتمالي للحالة المتطورة تكون بالصورة الرياضية التالية .

$$\Psi^* \Psi = c_1^* c_1 \psi_1^* \psi_1 + c_2^* c_2 \psi_2^* \psi_2 + c_1^* c_2 \psi_1^* \psi_2 e^{i\omega t} + c_2^* c_1 \psi_2^* \psi_1 e^{-i\omega t} \quad (8.19)$$

حيث

$$\omega = \frac{E_1 - E_2}{\hbar} \quad (8.20)$$

ويكون التردد المكافئ

$$\nu = \frac{E_1 - E_2}{h}$$

فيزيائيا ، تشير هذه النتائج الى ان كثافة الاحتمال للحالة المتطورة تتغير مع الزمن بصورة ذبذبية جيبية *sinusoidal oscillation* ويكون تردد هذه الذبذبة يساوي تماما للقيمة المعطاة في فرضية بور السابقة .

ويمكن تلخيص الوصف الكمي للذرة المشعة كما يلي : خلال الانتقال من حالة كمية الى حالة كمية أخرى ، يكون التوزيع الاحتمالي للإلكترونات **متطورا ويتذبذب جيبيا** . وهذه الأهنزازة الجيبية يصاحبها مجال كهرومغناطيسي متذبذبا ، مشكلا بذلك الإشعاع الكهرومغناطيسي المبعث من هذه الذرة.

#### (8.4) معادلة شرودنجر *The Schrodinger Equation*

لإيجاد دالة الحالة لنظام فيزيائي خاص ، نعتمد على حل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية والتي تعرف بمعادلة **شرودنجر** . لإشتقاق هذه المعادلة في حالة جسيم منفرد نتبع ما يلي : لنعتبر دالة موجة  $\psi$  التي يكون فيها الإعتدال الزمني متغيرا جيبيا ، ولنفرض ان طول هذه الموجة  $\lambda$  . عندئذ، يكون الجزء المكاني لهذه الدالة خاضعا لمعادلة الموجة المعيارية المستقلة زمانيا ، وهي

$$\nabla^2\psi + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\psi = 0$$

وبحسب **فرضية دي برولي** ( بند 7.10 ) ، يكون مصاحبا للجسيم الذي يتحرك بزخم خطي  $p$  موجة طولها  $h/p$  . وعليه ، فإنه من المتوقع ان يخضع هذا الجسيم لمعادلة موجة على الصورة التالية

$$\nabla^2\psi + \left(\frac{2\pi p}{h}\right)^2\psi = 0$$

حيث ان طاقة الجسيم الكلية ( طاقة الحركة + طاقة الوضع ) :  $E = \frac{1}{2} mu^2 + V$  . اذا كان الزخم الخطي للجسيم  $p = mu$  ، فإنه يمكن التعبير عن هذا الزخم بدلالة الطاقة الكلية كما يلي

$$p^2 = 2m(E - V)$$

وعليه ، تكون الصورة الرياضية لمعادلة الجسيم كما يلي

$$\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2m}{h^2} (E - V)\psi = 0 \quad (8.21)$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة **ايرون شرودنجر** التي اعلن عنها في عام 1926 ، وهي معادلة خطية، تفاضلية جزئية من الدرجة الثانية . وتعتمد تطبيقات هذه المعادلة في الفيزياء على اختيار دالة الجهد *potential energy*  $V(x,y,z)$  المناسبة للنظام الفيزيائي الخاص بالدراسة. عند تحديد دالة الجهد ، تكون المسألة الرياضية هي كيفية إيجاد الدالة المحققة لهذه المعادلة .

كما نلاحظ ان جميع حلول معادلة شرودنجر ذات معنى فيزيائي . وبالرغم من ان حل هذه المعادلة قد يكون معقدا ، الا ان النتائج تكون سهلة الفهم . كما يوجد حولا مقبولة لهذه المعادلة اذا كانت قيم الطاقة  $E$  معرفة بشكل مؤكد *certain definite* . وتسمى قيم الطاقة المسموح بها **بالقيم الذاتية eigenvalues** وهي في الحقيقة تمثل مستويات الطاقة المميزة للنظام الفيزيائي . كما تسمى الحلول المقابلة **بالدوال الذاتية eigenfunctions** وهي تمثل دوال حالة النظام .



وبعبارة اخرى ، ان معادلة شرودنجر تؤدي الى تحديد طاقة الحالات في النظام بالإضافة الى دوال الحالة المصاحبة . في البند التالي ، سنتناول تطبيق هذه المعادلة على ذرة الهيدروجين .

### (8.5) ميكانيكا الكم لذرة الهيدروجين *Quantum Mechanics of Hydrogen Atom*

تشكل النظرية الكمية لحركة الإلكترون في مجال مركزي القواعد الأساسية للفيزياء الذرية الحديثة . ولدراسة هذه الحركة ، نستخدم الإحداثيات الكروية  $(r, \theta, \phi)$  لوصف حركة هذا الإلكترون المنفرد في الذرة ، كما ان التماثل الكروي *spherical symmetry* للمجال الذي يتحرك فيه هذا الإلكترون يسهل هذه الدراسة . رياضيا ، يكون مؤثر لابلاس *Laplace operator* في هذه الإحداثيات كالتالي

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (8.22)$$

وتكون معادلة شرودنجر كما يلي

$$\frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \psi + \frac{8\pi^2\mu}{h^2} (E - V)\psi = 0 \quad (8.23)$$

حيث  $\mu$  الكتلة المختصرة للإلكترون . في حالة ذرة الهيدروجين ، يكون الجهد الكهربائي كما يلي

$$V = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (8.24)$$

لحل معادلة شرودنجر ، نتناول حالات ذرة الهيدروجين التالية :

#### (1) الحالة الأرضية لذرة الهيدروجين

نفرض ان الحل التجريبي للمعادلة على صورة الدالة الأسية التالية

$$\psi = e^{-\alpha r} \quad (8.25)$$

حيث  $\alpha$  يساوي ثابت ويتم تحديد قيمته عند التعويض في معادلة شرودنجر . تؤول هذه المعادلة الى التالي

$$\left( \alpha^2 + \frac{8\pi^2\mu E}{h^2} \right) e^{-\alpha r} + \left( \frac{2\pi\mu e^2}{\epsilon_0 h^2} - 2\alpha \right) \frac{e^{-\alpha r}}{r} = 0 \quad (8.26)$$

تكون هذه المعادلة صحيحة لجميع قيم  $r$  اذا تلاشت الكميات في الأقواس ، اي

$$\alpha^2 + \frac{8\pi^2\mu E}{h^2} = 0 \quad \frac{2\pi\mu e^2}{\epsilon_0 h^2} - 2\alpha = 0 \quad (8.27)$$

حيث تعطي المعادلة الثانية (8.27) قيمة  $\alpha$  التي هي مقلوب نصف قطر بور الأول ، او

$$\alpha = \frac{\pi\mu e^2}{\epsilon_0 h^2} = \frac{1}{a_H} \quad (8.28)$$

وبتعويض قيمة  $\alpha$  في المعادلة الأولى من معادلة (8.27) ، نحصل على التالي

$$E = - \frac{\mu e^4}{8\epsilon_0 h^2} \quad (8.29)$$

وهذه المعادلة تعطي نفس قيمة الطاقة عند نصف قطر بور الأول ( بند 8.3) ، كما تمثل طاقة الحالة الأرضية لذرة الهيدروجين .

من الجدير بالذكر ان الحل المعطى في معادلة (8.25) والذي فيه قيمة  $\alpha$  المعطاة في معادلة (8.28) لا يمثل بالكامل دالة الحالة ، وذلك لأن هذا الحل غير معايير *not normalized* . رياضيا ، في حل المعادلات التفاضلية ، يكون ناتج حاصل ضرب اي حل بثابت اختياري حلا لهذه المعادلة . وعليه ، يمكن كتابة معادلة (8.25) بالصورة التالية

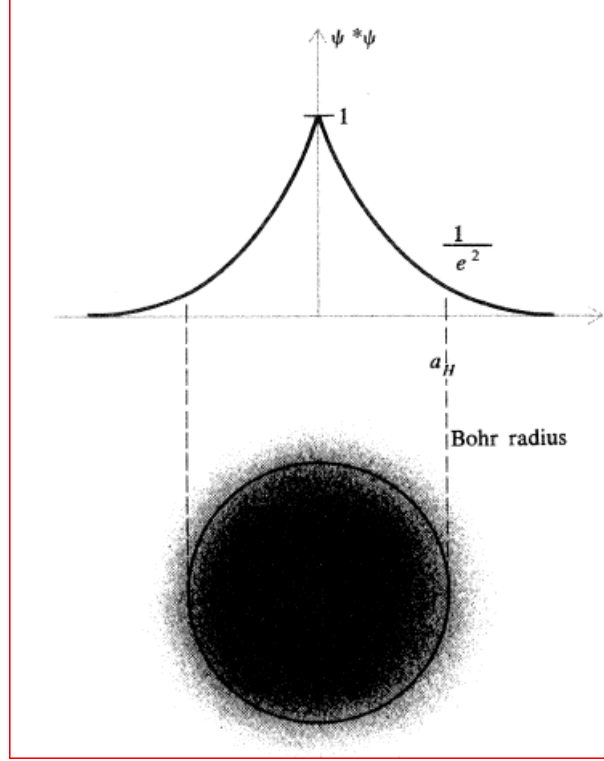
$$\psi = C e^{-\alpha r} \quad (8.30)$$

مع ملاحظة ان هذا الإجراء الرياضي لا يؤثر على قيمة الطاقة  $E$  . بتطبيق شرط المعايرة (8.15) على معادلة (8.30) ، نحصل على ما يلي

$$\int_0^{\infty} C^2 e^{-2\alpha r} 4\pi r^2 dr = 1 \quad (8.31)$$

بتكامل هذه المعادلة نحصل على قيم ثابت المعايرة  $C$  .

وفقا للنتائج السابقة ، تكون كثافة احتمال الإلكترون في الحالة الأرضية لذرة الهيدروجين **متماثلة كرويا** وتتناقص أسيا مع المسافة الشعاعية  $r$  ، حيث تكون هذه الكثافة اكبر ما يمكن عند المركز وتتضاءل تدريجيا بمعامل  $e^{-2}$  خلال مدى نصف قطر بور الأول ( الشكل 8.4).



شكل (8.4) كثافة احتمال الإلكترون في الحالة الأرضية لذرة الهيدروجين .

## (2) الحالات المثارة (المتهيجة) Excited States

لأيجاد دوال الحالات المثارة وطاقة هذه الحالات لذرة الهيدروجين ، لا بد من حل معادلة شرودنجر كاملة . ويتم ذلك باستخدام طريقة فصل المتغيرات *variables separation* وتكون المعالجة الرياضية للحل كما يلي

نعبر عن دالة الحالة بصورة حاصل ضرب ثلاثة دوال ، حيث كل دالة بمتغير واحد ، او

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\phi) \quad (8.32)$$

ثم بالتعويض في معادلة شرودنجر (8.23) ، نحصل على التالي

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \sin^2 \theta \frac{8\pi^2\mu r^2}{h^2} (E - V) = 0 \quad (8.33)$$

من اجل ان يحقق هذا الحل الافتراضي المعادلة التفاضلية لجميع قيم المتغيرات الإحداثية  $(r, \theta, \phi)$  ، يجب ان يكون الحد الأول في معادلة (8.33) مساويا لكمية ثابتة ، وبغير ذلك ، تكون الإحداثيات  $r, \theta$  معتمدة على المتغير  $\phi$  . لنفرض ان هذا الثابت يساوي  $-m^2$  ، وبذلك يمكن تقسيم بقي الحدود في هذه المعادلة الى جزئين : جزء شعاعي  $radial$  ، وآخر يعتمد على الزاوية  $\theta$  . بجعل كل جزء منهما مساويا لثابت آخر هو  $\ell(\ell + 1)$  . وعليه نحصل على المعادلات التفاضلية المنفصلة التالية

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2 \quad (8.34)$$

$$\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = \ell(\ell + 1) \quad (8.35)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{8\pi^2 \mu r^2}{h^2} (E - V) = \ell(\ell + 1) \quad (8.36)$$

في حالة ذرة الهيدروجين ، تكون طاقة وضع الإلكترون هي

$$V = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

، لذلك يكون حل معادلة (8.34) التي تحوي المتغير  $\phi$  كما يلي

$$\Phi = e^{im\phi} \quad (8.37)$$

من اجل ان يكون هذا الحل مقبولا فيزيائيا ، من الضروري افتراض ان  $\Phi$  لها نفس القيم لجميع القيم التالية :

$\phi, \phi + 2\pi, \phi + 4\pi, \dots$  ، وإن لم يتوفر هذا الشرط تكون دالة الحالة معرفة بشكل غير وحيد *uniquely defined* عند نقطة معطاة في الفراغ . وهذا المتطلب يقيد قيم  $m$  المسموحة فقط بالأعداد الصحيحة ، اي

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (8.38)$$

ويسمى العدد  $m$  بالعدد الكمي المغناطيسي *magnetic quantum number* .

اما معادلة  $\theta$  - (معادلة (8.35)) هي احد اشكال معادلة تعرف بمعادلة ليجندر التفاضلية *Legendre differential equation* ، ويكون الحل المقبول لهذه المعادلة فقط اذا تحقق الشرط :  $\ell \geq |m|$  ، حيث  $\ell$  عدد صحيح موجب . ويسمى هذا العدد بالعدد الكمي السمتي *azimuthal quantum number* ، كما تعرف هذه الحلول بكثيرة حدود ليجندر المرافقة *associated Legendre polynomials*  $P_\ell^m(\cos \theta)$  . رياضيا ، يمكن ايجاد قيمها باستخدام العلاقة المولدة التالية :

$$P_\ell^{|m|}(x) = \frac{(1-x^2)^{(1/2)|m|}}{2^\ell \ell!} \left( \frac{d}{dx} \right)^{|m|+\ell} (x^2-1)^\ell \quad (8.39)$$

باستخدام معادلة (8.39) ، نحصل على بعض قيم كثيرة حدود ليجندر المرافقة المبينة في الجدول ادناه

$$\begin{array}{ll} P_0^0(x) = 1 & P_1^1(x) = (1 - x^2)^{1/2} \\ P_1^0(x) = x & P_2^1(x) = 3x(1 - x^2)^{1/2} \\ P_2^0(x) = (\frac{1}{2})(3x^2 - 1) & P_2^2(x) = 3(1 - x^2) \end{array}$$

تسمى المعادلة الشعاعية (8.36) بمعادلة لاغوريه التفاضلية *Laguerre differential equation* ، ويكون الحل المقبول لهذه المعادلة كما يلي

$$R(\rho) = \rho^\ell e^{-(1/2)\rho} L_{n+\ell}^{2\ell+1}(\rho)$$

حيث يكون المتغير  $\rho$  كما يلي

$$\rho = \frac{2r}{na_H} \quad (8.40)$$

حيث  $n$  عدد صحيح موجب ، ويسمى العدد الكمي الرئيسي *principal quantum number* . وتكون قيم هذا العدد كما يلي :  $n \geq \ell + 1$  . كما تسمى الدالة  $L_{n+\ell}^{2\ell+1}(\rho)$  كثيرة حدود لاغوريه المرافقة *associated Laguerre polynomial* . وتعطى العلاقة المولدة لهذه الدالة كما يلي

$$L_{n+\ell}^{2\ell+1}(\rho) = \left(\frac{d}{d\rho}\right)^{2\ell+1} \left[ e^\rho \left(\frac{d}{d\rho}\right)^{n+\ell} (\rho^{n+\ell} e^{-\rho}) \right] \quad (8.41)$$

باستخدام معادلة (8.41) ، نجد ان الصورة الرياضية لهذه الدالة تكون كالتالي

$$\begin{array}{ll} L_0^0(\rho) = 1 & L_1^1(\rho) = -1 \\ L_1^0(\rho) = 1 - \rho & L_2^1(\rho) = 2\rho - 4 \\ L_2^0(\rho) = \rho^2 - 4\rho + 2 & L_2^2(\rho) = 2 \end{array}$$

في عملية حل المعادلة الشعاعية التفاضلية ، نجد ان القيم الذاتية للطاقة تحدد بالعدد الكمي الرئيسي  $n$  ، وتكون هذه القيم كما يلي

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{8\epsilon_0 n^2} \left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (8.42)$$

كما يكون لكل قيمة من قيم  $n$  ذات الطاقة  $E_n$  عددا من القيم المختلفة للعدد الكمي السمتي  $\ell$  ، تحديدا ،

$\ell = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$  . وتمثل كل قيمة من هذه القيم  $\ell$  حالة ذاتية من نوع مختلف . عادة ، يشار الى قيم  $\ell = 0, 1, 2, 3$  بالرموز التالية :  $s, p, d, f$  على الترتيب .

كما ان لكل قيمة من قيم  $\ell$  ، يوجد عددا من القيم  $(2\ell + 1)$  مصاحبة للقيمة  $m$  وهي كما يلي:  
 قيمة من  $n$  . كما يلخص الجدول (8.1) هذه القيم على النحو التالي

$n$	1	2	3
$l$	0 (s)	0 (s)    1 (p)	0 (s)    1 (p)    2 (d)
$m$	0	0    -1    0    +1	0    -1    0    +1    -2    -1    0    +1    +2

جدول (8.1) القيم الممكنة للأرقام الكمية .

وعليه ، نجد ان دالة الحالة الكاملة ، الناتجة من حاصل ضرب دوال المتغيرات الثلاثة السابقة ، على الصورة التالية

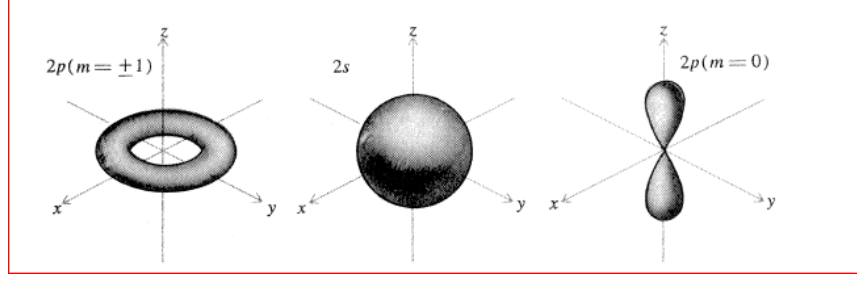
$$\psi_{n,l,m} = C\rho^l e^{-\rho/2} L_{n+l}^{2l+1}(\rho) P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (8.43)$$

كما يمكن تلخيص الصور الرياضية للدوال الذاتية لذرة الهيدروجين لكل الحالات  $states$  في الجدول التالي (جدول 8.2)

State	$n$	$l$	$m$		
1s	1	0	0	$e^{-\rho/2}$	
2s	2	0	0	$e^{-\rho/2} (1 - \rho)$	
2p	2	1	-1	$e^{-\rho/2} \rho$	$\begin{cases} \sin \theta e^{-i\phi} \\ \cos \theta \\ \sin \theta e^{+i\phi} \end{cases}$
			+1		
3s	3	0	0	$e^{-\rho/2} (\rho^2 - 4\rho + 2)$	
3p	3	1	-1	$e^{-\rho/2} (\rho^2 - 2\rho)$	$\begin{cases} \sin \theta e^{-i\phi} \\ \cos \theta \\ \sin \theta e^{+i\phi} \end{cases}$
			+1		
3d	3	2	-2	$e^{-\rho/2} \rho^2$	$\begin{cases} \sin^2 \theta e^{-i2\phi} \\ \sin \theta \cos \theta e^{-i\phi} \\ (1 - 3 \cos^2 \theta) \\ \sin \theta \cos \theta e^{+i\phi} \\ \sin^2 \theta e^{+i2\phi} \end{cases}$
			-1		
			0		
			+1		
			+2		

جدول (8.2) : الدوال الذاتية لذرة الهيدروجين .

يوضح الشكل (8.5) الأشكال الهندسية لبعض دوال الحالة في ذرة الهيدروجين وذلك من خلال عرض كثافة الإحتمال للحالة المثارة الأولى ( $n = 2$ ) .



شكل (8.5) كثافة الإحتمال للحالة ( $n = 2$ ) في ذرة الهيدروجين.

### ▪ الزخم الزاوي *Angular Momentum*

يمكن ايجاد الزخم الزاوي للإلكترون يتحرك في مجال قوة مركزية باستخدام الطرق المعيارية لميكانيكا الكم . وتبين هذه الطرق ان الزخم الزاوي يكون كمية مكممة ( كما في فرضية بور)، وتحدد الأعداد الكمية السابقة مقدار هذا الزخم في الحالات الكمية المختلفة.

وعليه ، يكون التعبير الرياضي للزخم الزاوي المداري الكلي *total orbital angular momentum* بدلالة الرقم الكمي السمتي فقط كما يلي

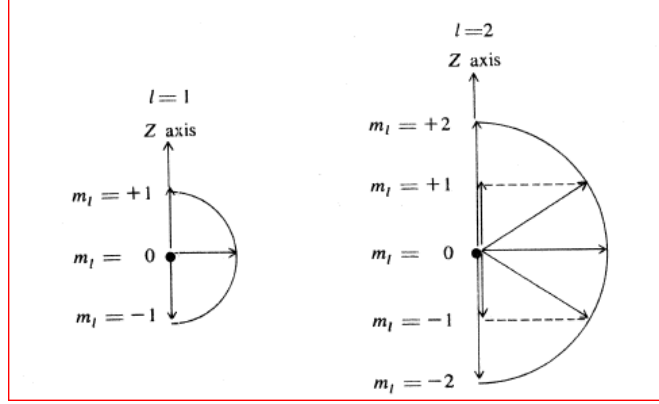
$$\sqrt{l(l+1)} \frac{h}{2\pi} = \sqrt{l(l+1)} \hbar$$

نلاحظ ان هذا المقدار للزخم الزاوي المداري يختلف عن القيمة التي فرضها بور ( $nh/2\pi$ ). وبشكل خاص ، نجد ان مقدار هذا الزخم يساوي الصفر للحالة s ( $\ell = 0$ ) ، هذا يعني ان سحابة الإلكترون لا تملك دوراناً محصلاً *net rotation* ولا تمنع حركة اي إلكترون.

ايضا ، تظهر النظرية ان مركبة الزخم الزاوي في اتجاه محور z تكون مكممة *quantized* ، ومقدارها كما يلي

$$\frac{mh}{2\pi} = m \hbar$$

حيث  $m$  العدد الكمي المغناطيسي الذي يكون مرافقاً لزاوية الدوران  $\phi$  حول محور z . بإعتبار القيم الممكنة لهذا العدد ، فإنه يوجد ( $2\ell + 1$ ) قيمة مختلفة لمركبة الزخم الزاوي في اتجاه هذا المحور مرافقة لكل قيمة من قيم  $\ell$  ( كما في الشكل 8.6).



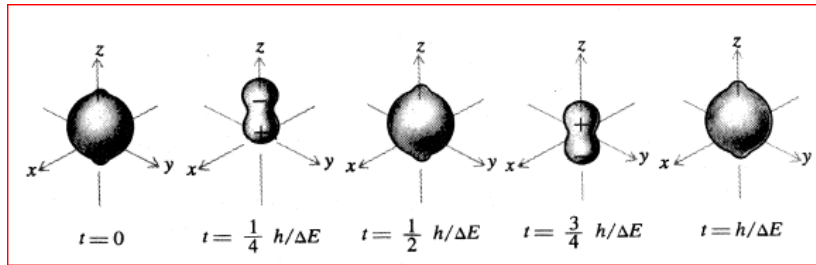
شكل (8.6) الزخم الزاوي الكمي الفضائي للحالات:  $l = 1, 2$

### (8.6) القفزات المشعة وقواعد الإنتقاء Radiative Transitions and Selection Rules

كما سبق ذكره ، اذا تغيرت الحالة الذاتية للذرة ، فإن كثافة الإحتمال للشدة الإلكترونية تصبح متطاورة وتتذبذب جيبيًا بالتردد المعطى في شرط بور الترددي. وتعتمد الطريقة التي تهتز بها الشحنة الإلكترونية على الحالات الذاتية المشمولة في عملية هذا التغيير . فمثلا ، في حالة ما يعرف **قفزة ثنائي القطب dipole transition** ، يهتز مركز الثقل للشحنات السالبة في السحابة الإلكترونية حول النواة الموجبة الشحنة . حينئذ ، تصبح الذرة ثنائي قطب كهربائي متذبذب *oscillating electric dipole* .

يبين الشكل (8.7) اختلاف التوزيع الشحني لذرة الهيدروجين عندما تكون في حالة متطاورة ( متحالفة) المتمثلة بالترابط  $1s + 2p (m = 0)$  . ويلاحظ ان مركز الثقل للشحنة يتحرك الى الأمام والى الخلف عبر محور  $z$  و يكون التوزيع الإتجاهي للمجال الكهرومغناطيسي المرافق مشابها لحالة الهوائي ثنائي القطب الممتد في اتجاه محور  $z$  .

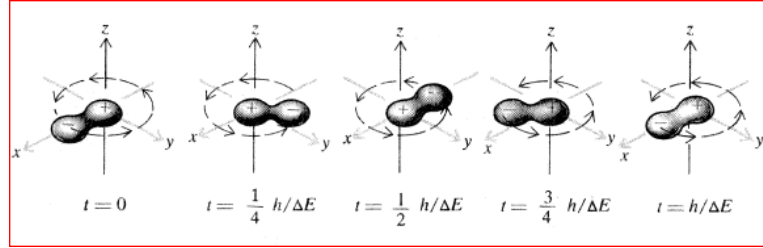
وعليه ، يكون الإشعاع اعظما في المستوى  $xy$  ويساوي الصفر عبر محور  $z$  ، كما يكون مجال الإشعاع مستقطبا خطيا في مستوى موازي لمحور ثنائي القطب هذا .



شكل (8.7) توزيع الشحنة في حالة التطاور  $1s + 2p_0$  كدالة للزمن .

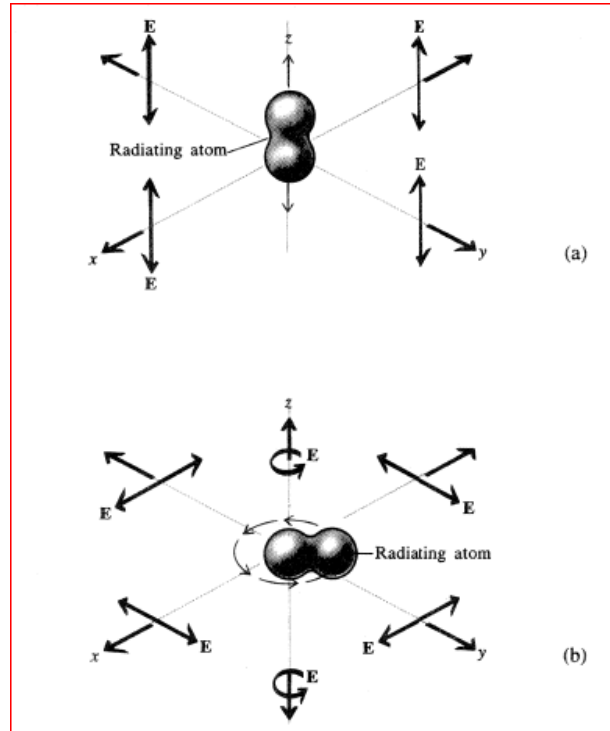


وهناك حالة مختلفة ( كما في الشكل 8.8 ) ، حيث الحالة المتطاورة ناتجة عن الترابط بين  $1s + 2p_{(m=+1)}$  . في هذه الحالة ، يتحرك مركز ثقل الشحنات الإلكترونية في مسار دائري حول محور  $z$  ويكون التردد الزاوي للحركة معطى بقانون تردد بور  $\omega = \Delta E/\hbar$  .



شكل (8.8) توزيع الشحنة في حالة التطاور  $1s + 2p_1$  كدالة للزمن .

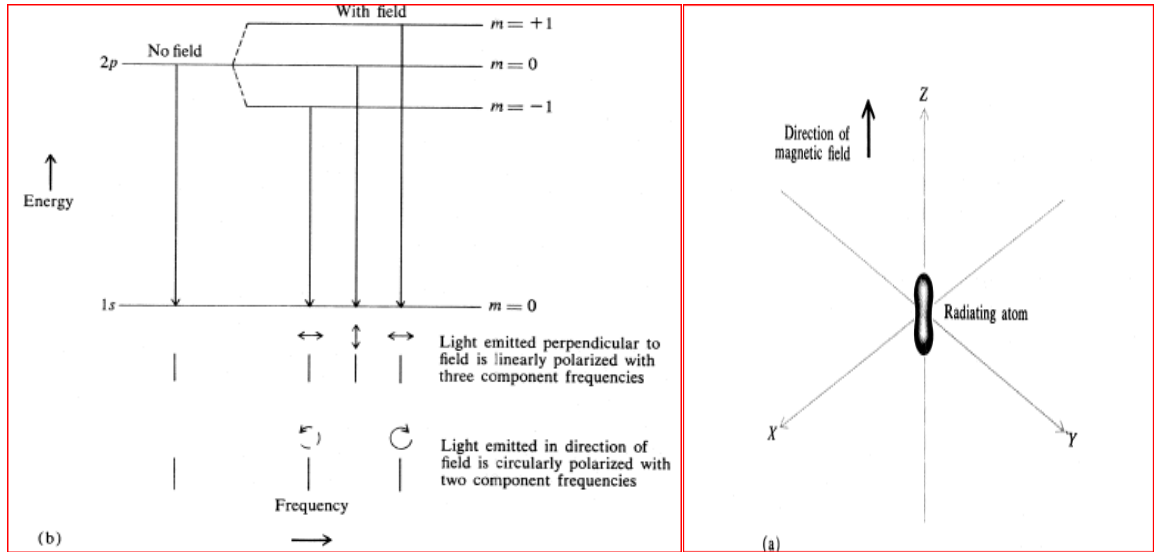
في هذه الحالة ، بدلا من ان يكون ثنائي القطب متذبذبا ، فإن الذرة تصبح على شكل ثنائي قطب دوار *rotating dipole* . كما يكون مجال الإشعاع المرافق مستقطبا دائريا للإشعاع المنتشر في اتجاه محور  $z$  ، بينما يكون مستقطبا خطيا للإشعاع المنتشر في الإتجاه العمودي على هذا المحور . كما يكون الإستقطاب لمجال هذا الشعاع بوضوايا للإنتشار ما بين هذين الإتجاهين ( الموازي والعمودي على محور  $z$  ) . يوضح الشكل (8.9) على هذه الحالات .



شكل (8.9) استقطاب الإشعاع الكهرومغناطيسي (a) ثنائي قطب متذبذب (b) ثنائي قطب دوار .

كما ان حالة التطاور في حالة الترابط  $1s + 2p_{(m=-1)}$  تكون نفس حالة التطاور للترابط  $1s + 2p_{(m=+1)}$  ، غير ان اتجاه دوران الشحنات الإلكترونية يكون **معكوسا** . وتباعا ، يكون استقطاب الشعاع المرافق الدائري **معكوسا** .

في المصادر الضوئية الخطية العادية ، تكون الذرات المشعة مرتبة *oriented* بشكل عشوائيا في الزمان والمكان . وعليه ، تكون ذبذباتها غير متطاورة *incoherent* ، اي يكون الأشعاع الكلي الناتج عن هذه الذبذبات مزيجا من كل انواع الإستقطاب . وبعبارة اخرى ، يكون هذا الإشعاع غير مستقطب . وعند وضع احد هذه المصادر في مجال مغناطيسي ( ليكن في اتجاه محور  $z$  ) كما في الشكل (8.10a) ، يكون هناك تفاعلا بين الإلكترونات المشعة وهذا المجال المغناطيسي ، مما ينتج عنه انقسام *split* لمستويات الطاقة الى عدة مستويات فرعية *sublevels* - واحدا لكل قيمة من قيم العدد الكمي المغناطيسي  $m$  . ونتيجة لذلك ، ينقسم كل خط من خطوط الطيف الى عدة مكونات . وتعرف ظاهرة الإنقسام هذه بظاهرة **زيمان Zeeman effect** . وبسبب هذه الظاهرة يمكن ملاحظة ظواهر استقطاب الشعاع المذكورة اعلاه ( الشكل 8.10b) .



شكل (8.10) ظاهرة زيمان (a) اتجاه المجال المغناطيسي الخارجي (b) مخطط الإنقسام في خطوط الطيف والقفزات الممكنة بين المستويات الفرعية ، واستقطاب الضوء المشع من هذه القفزات .

تتناول النظرية العامة للإنبعاث والامتصاص الذري حساب تكاملات معينة تعرف بإسم العناصر المصفوفية *matrix elements* . في حالة اشعاع ثنائي القطب الكهربائي ، يرمز لعنصر المصفوفة بالرمز  $M_{AB}$  ويعطى بالتكامل التالي

$$M_{AB} = \iiint \psi_A^* \mathbf{er} \psi_B dx dy dz \quad (8.44)$$

حيث  $\mathbf{r} = ix + jy + kz$  ، تمثل  $e$  شحنة الإلكترون . فيزيائيا ، يحدد عنصر المصفوفة سعة اهتزازة عزم ثنائي القطب *dipole moment* للحالة المتطورة والنااتجة عن ترابط الحالتين المستقرتين :  $\Psi_A$  ،  $\Psi_B$  .

في حالة الهيدروجين ، تكون  $M_{AB} = 0$  لجميع أزواج الحالات ما عدا تلك التي تختلف فيها قيم  $\ell_A$  و  $\ell_B$  بمقدار الواحد الصحيح . وبعبارة اخرى ، في حالة ثنائي القطب الكهربى ، يكون القفزات المسموح بها *allowed transition* هي فقط التي تتفق مع الشرط التالي

$$\Delta l = \pm 1 \quad (8.45)$$

وتعرف معادلة (8.45) *بقاعدة انتقاء  $\ell$  -selection rule* وتتضمن هذه القاعدة ان التغير في الزخم الزواي للذرة يكون بمقدار  $\hbar$  خلال القفزات المسموحة ويحمل الفوتون المنطلق في عملية الإنتقال مقدار هذا التغير.

كما يوجد قاعدة اخرى لإنتقاء *m - selection rule* التي تحدد بما يلي

$$\Delta m = 0 \text{ or } \pm 1 \quad (8.46)$$

يكون الإنتقال الذي يحقق الشرط  $\Delta m = 0$  موجودا في حالة ثنائي القطب البسيط ، بينما يكون الأنتقال الذي يحقق الشرط الآخر  $\Delta m = \pm 1$  مترافقا مع ثنائي القطب الدوار ( الشكل 8.10 ) .

#### ▪ معدلات القفزة وفترات حياة الحالات *Transition Rates and Lifetimes of States*

بالرجوع الى النظرية الكهرومغناطيسية ، نجد ان التعبير الكلاسيكي للقدره الكلية التي تنبعث من ثنائي القطب الكهربى المتذبذب الذي عزمه يساوي  $M = M_0 \cos \omega t$  يكون كما يلي

$$P = \frac{1}{3} \frac{\omega^4 M_0^2}{\pi \epsilon_0 c^3} \quad (8.47)$$

أيضا ، يمكن تطبيق معادلة (8.47) في حالة الإنبعاث الذري حيث  $|M_{AB}| = M_0$  . ولكن يكون تفسير العلاقة (8.47) مختلفا في هذه الحالة لأن في كل قفزة تحدث في الذرة تنبعث طاقة كمية  $h\nu$  ، لذلك يكون المعدل الزمني لعدد

الفقرات في كل ذرة يساوي عدد (A) الكوانتا المنطلقة في الثانية الواحدة من كل ذرة ويساوي هذا العدد المقدار  $\frac{P}{h\nu}$  ،  
اي

$$A = \frac{2}{3} \frac{\omega^3 |\mathbf{M}_{AB}|^2}{h\epsilon_0 c^3} \quad (8.48)$$

ويسمى هذا العدد احتمالية القفزة *transition probability* . كما يسمى مقلوب هذا العدد ، (1/A) ، زمن الحياة الإشعاعي *radiative lifetime* الذي تكون بعده *dimension* هي ابعاد الزمن (الثانية). كما تكون ازمان الحياة الذرية من رتبة  $10^{-8}$  s لقفزات ثنائي القطب المسموحة في المنطقة المرئية من الطيف . في المعادلة (8.47) ، يلعب العامل  $\omega^3$  دورا مهما لإطالة زمن حياة القفزة في المنطقة تحت الحمراء وتقصير هذا الزمن في المنطقة فوق بنفسجية .

### (8.7) خطوط الطيف الدقيقة - لف الإلكترونات - *Fine Structure of Spectrum lines-Electron Spin*

عند فحص طيف الهيدروجين بمقاييس طيفية *spectrometers* ذات قدرة تحليل عالية ، وجد ان هذه الخطوط تتألف من عدة مكونات متقاربة ، على سبيل المثال ، يتكون الخط  $H\alpha$  من خطين تفصل بينهما مسافة حوالي  $0.14 \text{ \AA}$  . ويعرف انقسام خطوط الطيف الى عدة مكونات بالتركيب الدقيق *fine structure* . عمليا ، لوحظ ان كثيرا من العناصر ، غير الهيدروجين ، تملك اطيافها هذا التركيب الدقيق وفقا لعدد مكوناتها : احادية ، مزدوجة ، ثلاثية ، .... الخ .

استطاع العالم باولي ان يعطي تفسيراً نظرياً لظاهرة التركيب الدقيق لخطوط الطيف ، وذلك بفرضية ان الإلكترون يملك زخماً ذاتياً *intrinsic angular momentum* بالإضافة الى الزخم الزاوي المداري *orbital angular momentum* . ويعرف هذا الزخم الزاوي اللف (الغزل) *spin* . كما ان جميع الإلكترونات لها نفس هذا اللف ، بغض النظر عن حركتها وارتباطها بالذرات . كما تبين هذه النظرية ان مركبة اللف في اي اتجاه معين يجب ان تتخذ احدى القيم التالية :  $\frac{\hbar}{2}$  او  $-\frac{\hbar}{2}$  .

وعليه ، يكون الزخم الزاوي الكلي لأي الكترون في الذرة مساويا للجمع الإتجاهي *vector sum* للزخم الزاوي المداري **I** والزخم الناتج عن عملية اللف **s** ، ويرمز لهذا المجموع بالرمز **j** ، او

$$\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s} \quad (8.49)$$

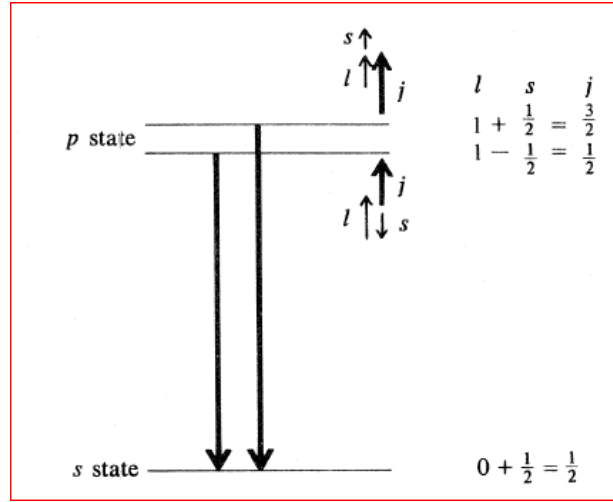
عادة ، تكون وحدة الزخوم الزاوية هي  $\hbar$  و تكون الزخوم الزاوية أعدادا كمية *quantum numbers* .

اذن ، يوجد لكل عدد كمي سمّي  $l$  قيمتان من الأعداد الكمية ، ويكون الزخم الزاوي الكلي للإلكترون المنفرد كما يلي

$$j = l + 1/2 \quad \text{and} \quad j = l - 1/2 \quad (8.50)$$

على سبيل المثال ، اذا كانت قيمة  $l = 2$  ، فإن قيمة  $j = 5/2, 3/2$  ، وهكذا ...

وفقا لهذه النظرية ، لا تكون قيم طاقات الحالات في ذرة الهيدروجين ( كما سبق ذكره) والتي لها نفس الرقم الكمي  $n$  متساوية في المقدار عند اعتبار لف إلكترونات في الذرات . عمليا ، يمكن القول ان الإلكترون الذي يدور حول النواة ، يولد مجالا مغناطيسيا كما في حالة التيار الكهربائي المار في الملفات الدائرية ، ويتفاعل العزم المغناطيسي المرافق لعملية اللف مع هذا المجال المغناطيسي ويعرف هذا بتفاعل اللفي-المداري  $spin orbit interaction$  . ونتيجة لهذا التفاعل ، يوجد حالتان هما:  $j = l \pm s$  ولكل حالة طاقة مختلفة قليلا . وعليه ، ينتج عن هذا التفاعل انقسام في خطوط الطيف . يوضح الشكل (8.11) تخطيطا لعملية الانقسام في القفزة من الحالة  $p$  الى الحالة  $s$  .



شكل (8.11) التركيب الدقيق لخط طيف عند القفزة  $p \rightarrow s$ .

## (8.8) تعددية اطياف الذرات كثيرة الإلكترونات

### Multiplicity in the Spectra of Many- Electro Atoms

للذرات المحتوية على اكثر من الكترون واحد ، يكون الزخم الزاوي الكلي  $\mathbf{J}$  مساويا للمجموع الإتجاهي لكل زخوم هذه الإلكترونات : المدارية  $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3, \dots$  و المغزلية  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \dots$  . لنفرض ان محصلة الزخوم الزاوية المدارية الناتجة من اقتران الزخوم الفردية للإلكترونات هي:  $\mathbf{L} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \dots$  ، وكذلك محصلة الزخوم المغزلية هي:  $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \dots$  . اذن ، يكون الزخم الزاوي الكلي للذرة والناتج من اقتران  $coupling$  هذه الزخوم المحصلة كما يلي

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (8.51)$$

ويسمى هذا النوع من الإقتران "إقتران  $LS$ " ، ويحدث هذا الإقتران في حالة العناصر الخفيفة .

وهناك نوع آخر من الإقترانات التي تسمى "إقتران  $jj$ " ، حيث يتم جمع الزخم الكلي  $\mathbf{j}$  للإلكترونات كل على انفراد للحصول على الزخم الكلي المحصل  $\mathbf{J}$  للذرة. يحدث هذا النوع من الإقتران في حالة العناصر الثقيلة .

في إقتران  $LS$  ، تكون كل الكميات  $\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{J}$  كميات مكممة  $quantized$  وتعطى كما يلي

$$|L| = \hbar\sqrt{L(L+1)}, |S| = \hbar\sqrt{S(S+1)}, |J| = \hbar\sqrt{J(J+1)}$$

حيث  $L, S, J$  هي اعداد كمية وتمتلك الخواص التالية :

$L$ : عدد صحيح موجب ، او صفر.

$S$ : اما عدد صحيح او نصف عدد صحيح ، ويعتمد ذلك على عدد الإلكترونات في الذرة (زوجيا او فرديا) ، على الترتيب وتباعا ، يكون العدد الكمي للزخم الكلي  $J$  عددا صحيحا او نصف عدد صحيح ، حيث يعتمد ذلك على عدد الإلكترونات (زوجيا او فرديا) على الترتيب.

كما تعتمد الطاقة الكلية للحالة على الكيفية التي تضاف بها الزخوم الزاوية المختلفة عند تحديد الزخم الزاوي المحصل وعليه ، لأي قيم معطاة من  $L, S$  ، تكون القيم المتنوعة من  $J$  مقابلة لطاقات مختلفة ، وهذا بدوره يسبب التركيب الدقيق لخطوط الطيف . رياضيا ، اتفق الباحثون في مجال الأطياف على الترميز الخاص بالحالة التالي

$$2S+1L_J$$

وتسمى الكمية  $2S+1$  بالتعددية *multiplicity* ، وهي تمثل عدد قيم  $J$  المختلفة ، اي في حالة  $L > S$  تكون

$$L+S, L+S-1, L+S-2, \dots, L-S$$

اما في حالة  $L < S$  ، فإن :

$$L+S, L+S-1, L+S-2, \dots, |L-S|$$

في هذه الحالة ، يكون عدد قيم  $J$  المختلفة يساوي  $2L+1$  . وتعرف بالتعددية غير الكاملة *incomplete multiplicity* .

يبين الجدول (8.3) التعددية للحالات لقيم  $S$  المختلفة وأسماء هذه الحالات .

$S$	Multiplicity ( $2S+1$ )	Name
0	1	Singlet
$\frac{1}{2}$	2	Doublet
1	3	Triplet
$\frac{3}{2}$	4	Quartet
2	5	Quintet
$\frac{5}{2}$	6	Sextet

جدول (8.3) تعددية الحالات .

في الجدول السابق (8.3) ، يمكن ان نلاحظ ما يلي

إذا كانت :  $S = 0$  ، فإن التعددية تساوي صفرا ، وتعرف هذه الحالة بالحالة المنفردة *singlet* . أما إذا كانت  $S = 1/2$  ، فإن التعددية تساوي 2 ، وتسمى هذه الحالة بالحالة المزدوجة *doublet* .

في حالة الذرة احادية الإلكترون ، تكون قيمة  $S$  الممكنة تساوي  $1/2$  ، وعليه تكون كل حالات هذه الذرات مزدوجة . أما في حالة وجود الكترونين في الذرة ، فإن يوجد قيمتان :  $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  ، أو  $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$  .

وعليه ، يوجد مجموعتان من الحالات للذرات ثنائية الإلكترونات ، وهما الحالة المنفردة والثلاثية *singlet and triplet* .

بالإضافة الى تسمية الحالات وفقا للتعددية ، يمكن استخدام الحروف لتمييز كل قيمة من قيم الزخم الزاوي الكلي المداري  $L$  كما في الجدول (8.4).

$L:$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	·	·
Designation	<i>S</i>	<i>P</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>K</i>	<i>M</i>	·	·

جدول (8.4) أسماء الحالات وفقا لقيم الزخم الزاوي المداري الكلي .

على سبيل المثال ، لنفرض حالة وجود الكترونين ، حيث يكون احدهما في حالة  $p$  ( $\ell_1 = 1$ ) ، بينما يكون الآخر في حالة  $d$  ( $\ell_2 = 2$ ) . لذلك ، تكون قيم  $L$  الممكنة هي كل القيم الصحيحة المحصورة بين المقدارين  $\ell_1 + |\ell_2 - \ell_1|$  أي ان  $L = 1, 2, 3$  والتي تقابل الحالات : *P, D, F* ، على الترتيب . بما ان  $S = 0, 1$  ، لذلك يوجد حالتان (منفردة وثلاثية) لكل قيمة من قيم  $L$  . ويمكن ترتيب هذه الحالات الممكنة للإرتباط بين هذين الإلكترونين كما في الجدول (8.5) .

— Singlets —		— Triplets —	
$^1P_1$	$^3P_0$	$^3P_1$	$^3P_2$
$^1D_2$	$^3D_1$	$^3D_2$	$^3D_3$
$^1F_3$	$^3F_2$	$^3F_3$	$^3F_4$

جدول (8.5) ترتيب الحالات عند ربط الكترونين  $p, d$  .

#### ■ قواعد الانتقاء *selection Rules*

في حالة الإقتران  $LS$  ، نكون قواعد الإنتقال التي تحكم الإشعاع المسموح لثنائي القطب كما يلي

$$\begin{aligned} \Delta L &= 0, \pm 1 \\ \Delta S &= 0 \\ \Delta J &= 0, \pm 1 \quad (J = 0 \rightarrow J = 0 \text{ forbidden}) \end{aligned}$$

حيث اشارة  $\Delta$  تعني التغير بين الأعداد الكمية للحالات النهائية والإبتدائية في عملية القفزات .

اضافة الى قواعد الإنتقاء السابقة ، يوجد قاعدة مهمة والتي تشمل ما يعرف **التعادلية parity** . تكون تعادلية الحالة الذرية اما زوجية *even* او فردية *odd* وفقا لمجموع قيم العدد  $l$  لكل افراد الإلكترونات في الذرة . وعليه ، اذا كان هذا المجموع زوجيا ( فرديا) فإن التعادلية تكون زوجية ( فردية ) . على سبيل المثال ، لنعتبر حالات إلكترونين في الذرة حيث احدهما في حالة  $s$  ، اي :  $l = 0$  ، بينما تكون حالة الآخر هي  $p$  ( $l = 1$ ) . وعليه ، يكون المجموع هو  $l_1 + l_2 = 1$  وبذلك تكون التعادلية في جميع حالات *sp* فردية ، وبالمثل ، تكون التعادلية لجميع حالات *sd* زوجية ، وهكذا ...

عموما يمكن القول ان قواعد الإنتقاء للقفزات بين الحالات المسموح بها *allowed* والممنوعة *forbidden* في حالة اشعاع ثنائي القطب الكهربائي هي

$$\left. \begin{array}{l} \text{odd} \rightarrow \text{odd} \\ \text{even} \rightarrow \text{even} \end{array} \right\} \text{(forbidden)}$$

$$\text{even} \leftrightarrow \text{odd (allowed)}$$

وعبارة اخرى يجب ان تكون تعادلية الحالة النهائية *final state* مختلفة عنها للحالة الإبتدائية *initial state* .

## (8.9) اطيف الجزيئات *Molecular Spectra*

وجد عمليا ان الجزيئات ، كما في حالة الذرات ، تظهر اطيفا ترددية منفصلة عندما تكون مثارة وفي الحالة البخارية *vapor state* وهذا يدل على ان طاقة الحالات للجزيئات تكون **مكممة** وان هذه الجزيئات قد تبعث او تمتص الفوتون عندما تنتقل من حالة طاقة الى حالة اخرى .

عادة ، يمكن التعبير عن طاقة الجزيء بصورة المجموع لثلاثة انواع من الطاقة وهي: الطاقة الدورانية *rotational energy* ( $E_{rot}$ ) ، الطاقة الإهتزازية *vibrational energy* ( $E_{vib}$ ) ، والطاقة الإلكترونية *electronic energy* ( $E_{el}$ ) ، اي

$$E = E_{rot} + E_{vib} + E_{el}$$

كما وجد ان  $E_{rot}$  تكون اصغر هذه الطاقات ( بضع اجزاء مئوية من الإلكترون- فولت) ، بينما تكون اكبر هذه الطاقات هي الطاقة الإلكترونية ( بضع الكترن - فولت ) ، في حين تكون قيمة الطاقة الإهتزازية من رتبة الأجزاء العشرية من الإلكترون- فولت . كما ان جميع هذه الطاقات تكون مكممة بطريقة مختلفة وكل منها يترافق مع مجموعات مختلفة من الأعداد الكمية

من الممكن حدوث القفزات بين مستويات الطاقة الدورانية فقط ، عندها يسمى الطيف الناتج بالطيف **الدوراني rotational spectrum** وعادة يكون واقعا في المنطقة تحت الحمراء البعيدة *far infrared* او في منطقة الميكروويف *microwave*



. اما اذا كان هناك تغيرا في الإهتزازة اثناء حدوث القفزة ( ولكن بدون تغير الكتروني ) فيسمى الطيف الناتج بالطيف الإهتزازي – الدوراني *rotation- vibration spectrum* ويكون هذا الطيف واقعا في القربية من المنطقة تحت الحمراء *near infrared* . بينما تكون خطوط الطيف الناتج من القفزات التي تتغير فيها الطاقة الإلكترونية ( الطيف الإلكتروني *electronic spectrum* ) واقعة في المنطقة المرئية والمنطقة فوق بنفسجية .

فيما يلي نستعرض خصائص مستويات هذه الطاقات كلا على حدا .

#### ▪ مستويات الطاقة الدورانية

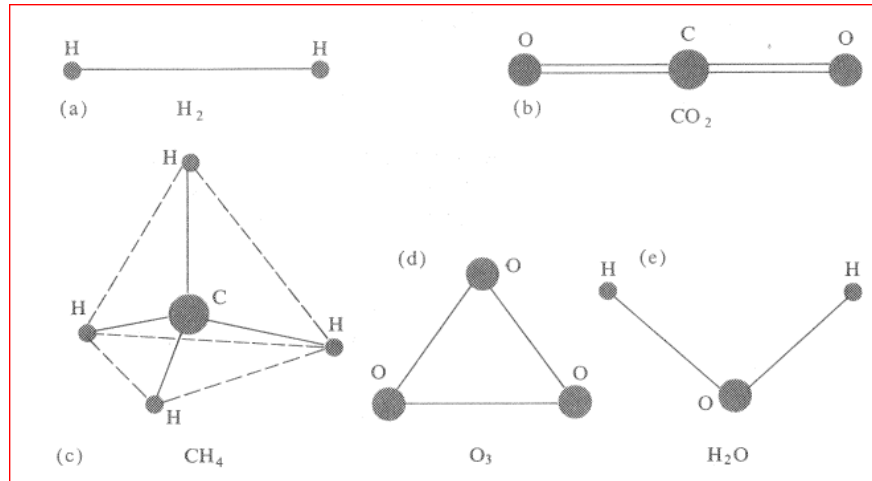
الطاقة الدورانية ،  $E_{rot}$  ، تتمثل في الطاقة الحركية لدوران الجزيئات ككل ويعبر عن هذه الطاقة المكتمة بدلالة الأعداد الكمية الدورانية ، كما يكون عدد هذه الأرقام الكمية اللازم لتعيين حالة دورانية معينة معتمدا على الشكل الهندسي لهذا الجزيء . هناك اربع انواع اساسية من الجزيئات ( كما في الشكل 8.12 ) وهي :

(1) جزيئات خطية *linear molecules*

(2) جزيئات كروية القمة *spherical – top molecules*

(3) جزيئات قمة تماثلية *symmetrical – top molecules*

(4) جزيئات قمة غير تماثلية *asymmetrical – top molecules*



شكل (8.12) الترتيب الهندسي لأنواع مختلفة من الجزيئات ذات التماثل الدوراني .

لنفرض ان عزوم القصور الذاتية *moment of inertia* للجزيئات حول المحاور الإحداثية  $(x,y,z)$  هي  $(I_x, I_y, I_z)$  ، يمكن تلخيص العلاقة بين هذه العزوم في هذه الأنواع من الجزيئات كما يلي:

في الشكل (8.12a,b) ، حيث الجزيئات خطية :  $I_x = I_y$  ,  $I_z = 0$  . بينما في الشكل (8.12c) ، حيث الجزيئات كروية القمة :  $I_x = I_y = I_z$  . وفي الشكل (8.12d) ، حيث الجزيئات تماثلية القمة :

$I_x \neq I_y \neq I_z$  . واخيرا في الشكل (8.12e) ، حيث الجزيئات لا تماثلية القمة :  $I_x \neq I_y \neq I_z$  .

في حالة الجزيئات الخطية والقمة التماثلية ، يلزم فقط عدد كمي واحد  $J$  لتحديد الحالة الدورانية . ويكون مقدار الزخم الزاوي الدوراني هو  $\hbar\sqrt{J(J+1)}$  وتكافئ الطاقة الدورانية قيمة الطاقة الكلاسيكية ، تحديدا ،

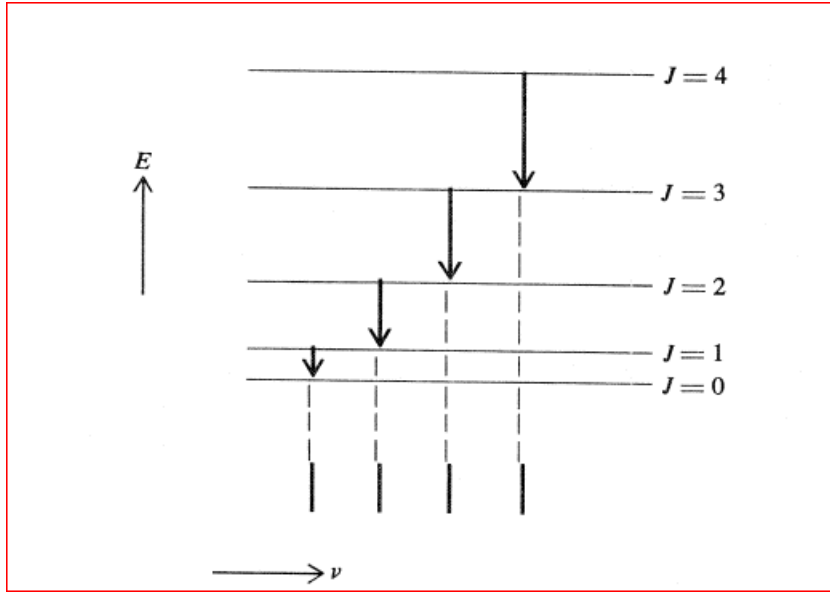
$$E_{\text{rot}} = \frac{(\frac{1}{2}) [\hbar\sqrt{J(J+1)}]^2}{I} = J(J+1) Bhc \quad (8.52)$$

حيث

$$B = \frac{h}{8\pi^2 cI} \quad (8.53)$$

$J = 0,1,2, \dots$  ،

فمثلا ، لنفرض ان جزيء ماء ، ثنائي الذرات ومتماثل ، يتكون من ذرتين كتلة كل منهما  $M/2$  والمسافة الفاصلة بينهما  $b$  . كلاسيكيا ، يكون عزم القصور الذاتي حول محور الدوران بالمقدار  $I = Mb^2$  . كما يكون مخطط طاقة المستويات الدورانية لجزيء خطي كما في الشكل (8.13) .



شكل (8.13) مخطط القفزات للطيف الدوراني النقي .

اما في حالة الجزيئات تماثلية القمة ، فإنه يلزم لتعيين الحالات الدورانية عدداً من الأرقام الكمية ، وهما  $K$  ,  $J$  . ويكون الزخم الزواي الدوراني الكلي  $\hbar\sqrt{J(J+1)}$  . بينما العدد الكمي  $K$  هو مركبة هذا الزخم حول محور التماثل ، ويكون بدلالة وحدات  $\hbar$  . لقيم معطاة من  $J, K$  ، يمكن الأفتراض اي من قيم  $K, K+1, K+2, \dots$  . وعندئذ ، تعطى طاقة المستويات الدورانية بالعلاقة التالية :

$$E_{\text{rot}} = J(J+1)Bhc + K^2(C-B)hc \quad (8.54)$$

حيث الكميات  $B, C$  ترتبط مع عزوم القصور الذاتية الرئيسية للجزيء كما يلي

$$B = \frac{h}{8\pi^2cI_b} \quad C = \frac{h}{8\pi^2cI_c} \quad (8.55)$$

حيث  $I_c$  عزم القصور الذاتي حول محور التماثل ،  $I_b$  عزم القصور الذاتي حول المحور المتعامد على محور التماثل . اما في حالة الجزيئات غير متماثلة القمة ، حيث يوجد ثلاثة عزوم قصور ذاتية مختلفة القيم وتشتمل على ثلاث اعداد كمية دورانية ، تكون العلاقة التي تعطي الطاقة الدورانية غير بسيطة بالمقارنة مع معادلة (8.54).

تكون قواعد الأنتقاء للإنتقال الدوراني مقيدة بالشروط التالية :

$$\begin{aligned} \Delta J &= 0, \pm 1 \\ \Delta K &= \pm 1 \end{aligned} \quad (8.56)$$

#### ■ مستويات الطاقة الإهتزازية :

إذا كان الجزيء مكوناً من  $N$  من الذرات ، فإنه يوجد  $3N$  من انماط الحركة ، حيث تكون ثلاث منها مقابلة للإنتقال الجزيئات ، وثلاث أخرى تقابل الدوران ( اثنان في حالة الجزيء الخطي ) . وعليه ، يتبقى  $3N-6$  ( or  $3N-5$  ) من هذه الأنماط والتي تقابل الأهتزازة العادية *normal vibration* .

نظرياً ، يمكن البرهان على ان كل نمط اهتزازي يعبر عنه بدلالة عدد كمي وحيد مصاحب . إذا اشرنا الى للترددات العادية بالرموز التالية :  $v_1, v_2, v_3, \dots, \dots, \dots, etc$  ، والى الأعداد الكمية الأهتزازية المصاحبة بالرموز التالية :

$v_1, v_2, v_3, \dots, \dots, etc$  ، تكون الطاقة الإهتزازية كالتالي

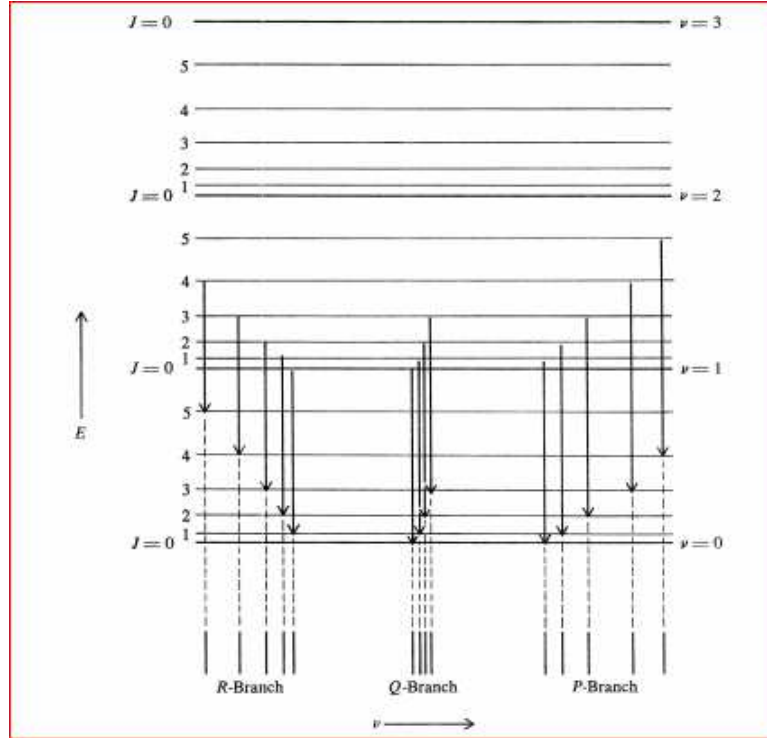
$$E_{\text{vib}} = (v_1 + \frac{1}{2})hv_1 + (v_2 + \frac{1}{2})hv_2 + \dots \quad (8.57)$$

تكون صلاحية هذه المعادلة (8.57) سارية المفعول إذا كانت الإزاحات الإهتزازية صغيرة لدرجة يمكن عندها اعتبار هذه الحركة مماثلة لحركة المتذبذب التوافقي . كما تشير هذه المعادلة الى ان مستويات الطاقة المصاحبة لنمط عادي معين يكون لها الخواص التالية

(1) متساوية التباعد فيما بينها . (2) تكون طاقة ادنى حالة اهتزازية ( $v_1 = 0, v_2 = 0, \dots$ ) غير صفرية ولها قيمة محددة :  $\left(\frac{1}{2}\right) \hbar v_1 + \left(\frac{1}{2}\right) \hbar v_2 + \dots$  وتعرف هذه الطاقة **بطاقة النقطة الصفرية zero-point energy** وتكون موجودة حتى عند درجة حرارة الصفر المطلق. كما تكون قواعد الإنتقاء للقفزات الاهتزازية كالتالي:

$$\Delta v = \pm 1 \quad (8.58)$$

يبين الشكل (8.14) مخططا للقفزات بين مستويات الطاقة الاهتزازية للجزيئات ثنائية الذرة و المتداخلة مع مستويات الطاقة الدورانية .



شكل (8.14) مخطط القفزات للطيف الاهتزازي - الدوراني .

كما تكون قواعد الإنتقاء التي تحدد حالة القفزات الاهتزازية - الدورانية كالتالي

$$\Delta J = 0, \pm 1 \quad (8.59)$$

ينقسم هذا الطيف الى ثلاثة فروع تسمى P , Q , R و تحدد هذه الفروع بقيم  $\Delta J$  التالية

$$\begin{array}{ll} \Delta J = -1 & P \text{ branch} \\ \Delta J = 0 & Q \text{ branch} \\ \Delta J = +1 & R \text{ branch} \end{array}$$

▪ مستويات الطاقة الإلكترونية في الجزيئات :

في حالة الجزيئات ثنائية الذرة ، تقترن الزخوم الزاوية المدارية والمغزلية معا بطريقة مماثلة لإقترانها في حالة الذرات . ولكن هنا يكون العدد الكمي المهم هو الذي يشير الى مجموع مساقط الزخم الزاوي المداري على الخط الواصل بين ذرتي الجزيء و يرمز لهذا العدد الكمي بالرمز  $\Lambda$  ، وتقابل الحالات الإلكترونية *electronic states* المتنوعة القيم المختلفة لهذا العدد الكمي ، ويرمز لهذه الحالات بالأحرف اليونانية التالية :

$$\Lambda: 0, 1, 2, 3, \dots$$

الحالة الإلكترونية :  $\Sigma, \Pi, \Delta, \Phi$  ، على الترتيب .

لأي قيمة معينة من  $\Lambda$  ، يتخذ العدد الكمي الدوراني  $J$  اي قيمة من القيم التالية :  $\Lambda, \Lambda + 1, \Lambda + 2, \dots$  .

وكما في حالة الذرات ، يحدد العدد المغزلي الكلي  $S$  تعددية الحالة الإلكترونية وتساوي هذه التعددية  $2S+1$  . كما تمثل عدد المستويات الفرعية لقيمة  $J$  المعطاة . وعليه ، يوجد حالات منفردة ( $S=0$ ):

$${}^1\Sigma, {}^1\Pi, {}^1\Delta, \dots$$

ويوجد حالات مزدوجة ( $S=1/2$ ):

$${}^2\Sigma, {}^2\Pi, {}^2\Delta, \dots$$

وكما في حالة الذرات ، تكون التعددية فردية (زوجية) اذا كان عدد الإلكترونات الكلي زوجي (فردى) .

وتكون قواعد الإنتقاء المقيدة للقفزات الإلكترونية كالتالي:

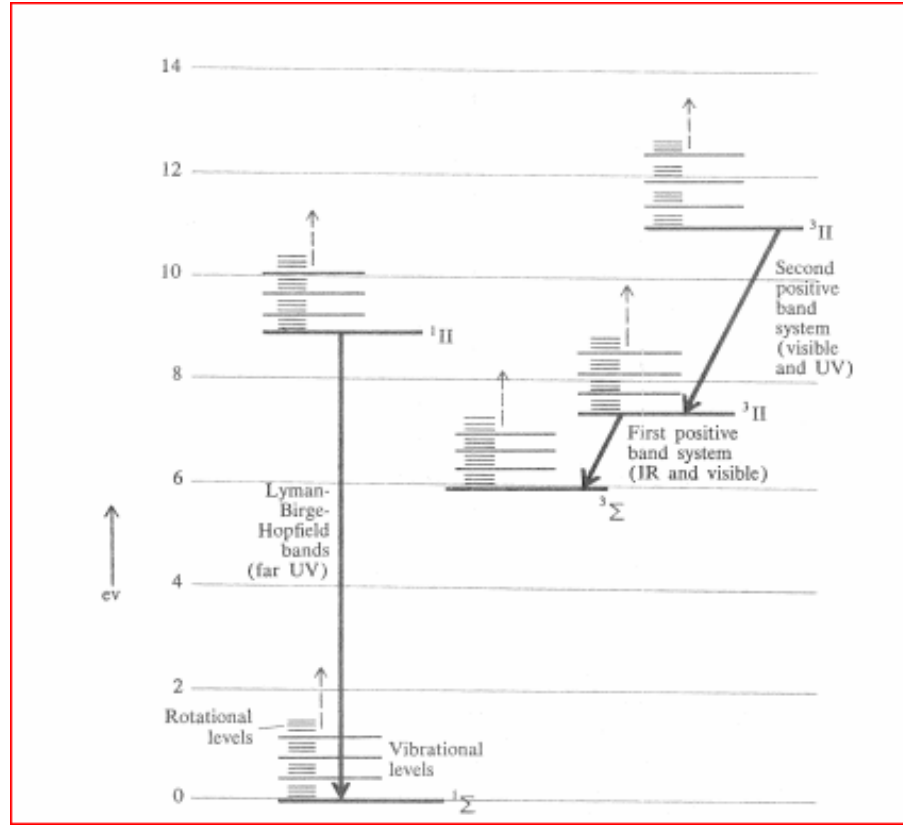
$$\Delta \Lambda = 0, \pm 1 \quad (8.60)$$

$$\Delta S = 0 \quad (8.61)$$

من الأمثلة على هذه القفزات المسموح بها ما يلي:

$${}^1\Sigma \rightarrow {}^1\Pi, {}^2\Pi \rightarrow {}^2\Delta, {}^3\Pi \rightarrow {}^3\Sigma$$

بما ان الطاقات الإلكترونية في الجزيئات تتداخل معها كلا من الطاقات الدورانية والإهتزازية ، لذلك تترافق القفزات الإلكترونية مع القفزات الإهتزازية والمدارية . ونتيجة لذلك ، يوجد عدد كثير جدا من الخطوط لكل قفزة الكترونية . يوضح الشكل (8.15) مخططا جزئيا لمستوى الطاقة في جزيء النيتروجين  $N_2$  .



شكل (8.15) مخطط مستوى الطاقة في جزيء النيتروجين .

## تمارين

(8.1) اذا كان  $R$  هو ثابت رايبيرغ لنواة متناهية الكتلة في معادلة (8.9) ، برهن ان في حالة نواة كتلتها  $M$  يكون هذا الثابت تقريبا :  $R_M = R - \left(\frac{m}{M}\right)R$  ؟.

(8.2) احسب الفرق بين الترددات في خطوط مجموعة بالمر  $\alpha$ -lines لذرة الهيدروجين و الديتيريوم ؟.

(8.3) احسب التردد في حالة القفزة لذرة الهيدروجين  $n = 100 \rightarrow n = 101$  ؟.

(8.4) برهن ان طاقة الحالة  $2s$  في ذرة الهيدروجين ( جدول 8.2 ) هي  $R - \frac{1}{4}$  ، وذلك باستخدام معادلة شرودنجر الشعاعية (8.36) . ؟

(8.5) بافتراض ان ذرة من الهيدروجين في الحالة الأرضية محاطة بكرة نصف قطرها  $r$  ، اشتق علاقة لإحتمالية تواجد الإلكترون في داخل هذه الكرة . (a) ثم جد الإحتمالية عندما  $R_H =$  . (b) جد قيمة  $r$  التي تكون عندها هذه الإحتمالية  $99\%$  ؟ .

(8.6) عين كل الحالات في تكوين  $pf$  لإلكترونين في حالة اقتران  $LS$  ؟.

(8.7) جد كل القفزات المسموحة بين تكوين  $pd$  و تكوين  $pf$  لثنائي القطب ؟

(8.8) جد زمن الحياة لحالة  $2p$  لذرة هيدروجين على فرض ان مقدار عزم ثنائي القطب للقفزة الى  $1s$  تقريبا تساوي  $e a_H$  ؟ .

(8.9) جد تردد الإشعاع المنبعث من القفزة الدورانية النقية  $J = 0 \rightarrow J = 1$  في جزيء كلوريد الهيدروجين ، علما ان المسافة بين ذرة الهيدروجين وذرة الكلور تساوي  $1.3A^0$  ؟





## الفصل التاسع: تضخيم الضوء – الليزر

### Light Amplification - Laser

نتناول في هذا الفصل تقنية تضخيم الضوء في وسط ما ، والتي تشكل اساس عمل اجهزة توليد شعاع الليزر . كما سندرس الاشكال المتنوعة من الرنانات الضوئية ونشرح بالتفصيل انواع الليزر المختلفة .

#### (9.1) مقدمة Introduction

كلمة " الليزر " *Laser* في اللغة الانجليزية هي مكونة من الحروف الاولى من العبارة التالية:

#### *Light amplification by stimulated emission of radiation*

وترجمة هذه العبارة باللغة العربية : **تضخيم الضوء بالإنبعاث المستحث للإشعاع** . في عام 1960، تم اختراع اول جهاز لتوليد الليزر الذي يدخل في تركيبه بلورة الروبي *Ruby crystal* في مختبرات هيوز البحثية *Hughes Research Laboratories* . بعد ذلك بعدة شهور، تم تطوير جهاز ليزر غازي (هيليوم – نيون) في مختبرات تلفون بيل *Bell Telephone Laboratories* . يتولد من ليزر الروبي ضوءاً احمر مرئياً ، بينما يتولد من ليزر الهيليوم - نيون ضوءاً احمر مرئياً وشعاعاً غير مرئي في المنطقة تحت الحمراء *infrared* . ومنذ ذلك الحين وحتى اليوم تم تطوير اجهزة متنوعة من الليزر بترددات ضوئية ضمن المدى الطيفي الممتد من الأشعة تحت الحمراء البعيدة الى مناطق الأشعة فوق بنفسجية .

في الأساس ، يمثل الليزر متذبذب ضوئي *optical oscillator* ويتكون من وسط مضخم موضوع بداخل رنان بصري *optical resonator* مناسب او ما يسمى بالفجوة *cavity* . حيث يقوم هذا الوسط بالتضخيم بواسطة بعض انواع الإثارة ( التهييج ) الخارجية ( كما سيرد تفصيل ذلك في البنود اللاحقة ) . وبعبارة اخرى ، يمكن وصف ذبذبة الليزر بالموجات الساكنة ( الموقوفة ) في هذه الفجوة . ونتيجة لذلك ، يكون الخارج من فتحة الجهاز اشعاعاً مكثفاً ، وحيداً في اللون *monochromatic* بدرجة عالية .

عملياً ، تعطي المصادر الضوئية التقليدية ( القوس الكربوني ، مصابيح الفنتيل الكهربائية ، انابيب التفريغ ) شدات لمعانية *luminous intensities* والمقابلة لأشعاع حراري عند درجات حرارية ليست اعلى من  $10^4$  K . بينما في حالة الليزر ، يمكن الحصول على شدات ضوئية مقابلة لدرجات حرارة تتراوح قيمها ما بين  $10^{20}$  K الى  $10^{30}$  K . وبذلك ، مكنت هذه القيم الهائلة من درجات الحرارة الباحثون من دراسة ظواهر ضوئية جديدة كظواهر الضوء غير الخطي *nonlinear optical effects* . كما اصبح ميسوراً استخدام الليزر في مجال الإتصالات للمسافات البعيدة ، الرادار الضوئي ، جراحة العيون ..... الخ.

#### (9.2) الإنبعاث المستحث و الإشعاع الحراري Stimulated Emission and Thermal Radiation

في عام 1917 ، ادخل العالم اينشتين فكرة الإشعاع المستحث ( التحريضي ) ( *stimulated ( induced)* ) بواسطة الأنظمة الذرية ، وبالتالي برهن على ان لوصف التفاعل بين المادة والإشعاع يجب بالضرورة اعتبار تلك العملية التي فيها تستحث ( او تحرض ) الذرات بوجود اشعاع خارجي . عندئذ تشع هذه الذرة فوتونا وتنتقل الى حالة ادنى من الطاقة .

لتوضيح هذه الفكرة ، نفرض ان نظاما ذريا كمما ، حيث يوجد له مستويات مرقمة :  $1, 2, 3, \dots, etc$  ، ولكل مستوى الطاقات التالية:  $E_1, E_2, E_3, \dots, etc$  ، على الترتيب وان اسكانات ( اشغال )  $populations$  او عدد الذرات في وحدة الحجم في هذه المستويات كالتالي:  $N_1, N_2, N_3, \dots$  . فاذا كان هذا النظام الذري في حالة إتزان مع الإشعاع الحراري عند درجة حرارة  $T$  فإن الإسكان النسبي لأي مستويين متجاورين (المستويات 1, 2 ) يعطى بمعادلة بولتزمان *Boltzman equation* ، اي

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{e^{-E_2/kT}}{e^{-E_1/kT}} \quad (9.1)$$

حيث  $k$  ثابت بولتزمان ، كما تتضمن معادلة (9.1) التالي : اذا كان  $E_2 > E_1$  فإن  $N_2 < N_1$  . وعليه ، يمكن للذرة في المستوى 2 ان تنحل ( تهبط ) *decay* الى المستوى 1 ، ويتبع ذلك إنبعاث *emission* فوتون من هذه الذرة .

لنفرض ان  $A_{21}$  يساوي المعدل الزمني لإحتمالية القفزة لهذا الإنبعاث التلقائي . وعليه ، يكون عدد الإنحلالات لكل ثانية يساوي  $N_2 A_{21}$  . ( يمكن حساب  $A_{21}$  بإستخدام معادلة (8.8) المعطاة في الفصل السابق ) .

إضافة الى هذه القفزات التلقائية ، يكون هناك قفزات مستحثة ( محرضة ) اخرى والتي معدلها الكلي يتناسب مع كثافة طاقة الإشعاع ذو التردد  $\nu$  (  $u_\nu$  ) ، حيث

$$\nu = \frac{(E_2 - E_1)}{h} \quad (9.2)$$

لنفرض ان ثوابت الإحتمالية للإنبعاث المستحث هي :  $B_{12}, B_{21}$  . عليه ، يكون المعدل الزمني لعدد القفزات المستحثة الى اسفل ( الإنبعاث ) يساوي  $N_2 B_{21} u_\nu$  . وبالمثل ، يكون المعدل الزمني لعدد القفزات المستحثة الى اعلى ( الإمتصاص ) يساوي  $N_1 B_{12} u_\nu$  . وتعرف هذه الثوابت بمعاملات اينشتين  $A$  و  $B$  .

تحت شروط الإتزان التالي: صافي معدل القفزات الى اسفل يجب ان يكون مساويا لمعدل القفزات الى اعلى، تحديدا ،

$$N_2 A_{21} + N_2 B_{21} u_\nu = N_1 B_{12} u_\nu \quad (9.3)$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة للمتغير  $u_\nu$  ، نحصل على التالي

$$u_\nu = \frac{N_2 A_{21}}{N_1 B_{12} - N_2 B_{21}}$$

على ضوء معادلة (9.1) ، يمكن الحصول بالعمليات الجبرية البسيطة على التالي

$$u_\nu = \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{1}{(B_{12}/B_{21}) e^{h\nu/kT} - 1} \quad (9.4)$$

وحتى تتوافق هذه المعادلة (9.4) مع قانون بلانك الإشعاعي ، يجب ان يتحقق التالي

$$B_{12} = B_{21} \quad (9.5)$$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \quad (9.6)$$

بناء عليه ، في الذرات التي هي في حالة الإتزان مع الإشعاع الحراري ، تكون النسبة بين معدل الإنبعاث المستحث الى معدل الإنبعاث التلقائي ،  $\gamma$  ، تساوي المقدار التالي

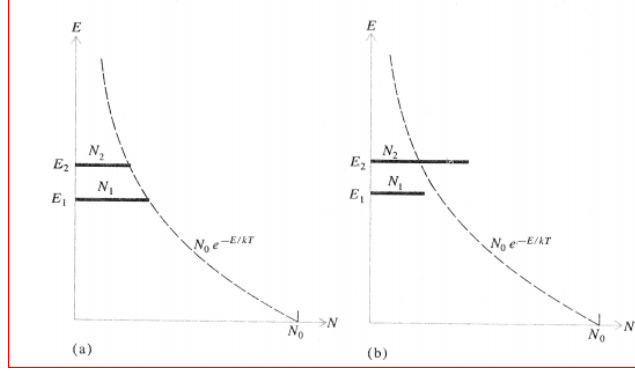
$$\gamma = \frac{B_{21}u_\nu}{A_{21}} = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (9.7)$$

وفقا لهذه المعادلة ، يكون معدل الإنبعاث المستحث صغيرا في المنطقة المرئية من طيف المصادر الضوئية العادية ( $T \sim 10^3 K$ ) ، ولذلك يكون معظم الإشعاع المنبعث من هذه المصادر من خلال القفزات التلقائية والعشوائية ، مما يجعل الضوء الصادر منها غير متطاور *incoherent* .

من ناحية اخرى ، في حالة اشعاع الليزر ، تكون الشدة الإشعاعية كبيرة الى درجة ما تجعل القفزات المستحثة هي القفزات السائدة بشكل كامل ، وهذا يجعل الإشعاع المنبعث متطاورا الى درجة عالية .

### (9.3) تضخيم الإشعاع في وسط ما *Amplification of Radiation in a Medium*

نفرض ان اشعاعا ما يمر في وسط بصري ، حيث يحتوي هذا الوسط على ذرات في مستويات طاقة مختلفة :  $E_1, E_2, E_3, \dots$  . لنعتبر فقط المستويين  $E_1, E_2$  ، حيث  $E_1 < E_2$  . وكما سبق ذكره ، فإن المعدلات الزمنية للإنبعاث المستحث والممتص من هذين المستويين يتناسب مع  $N_1 B_{12}$  ،  $N_2 B_{21}$  ، على الترتيب. بما ان  $B_{21} = B_{12}$  فإن المعدل الزمني للقفزات المستحثة الى اسفل سيزيد عن تلك القفزات الى اعلى اذا تحقق الشرط :  $N_2 > N_1$  ، اي يكون الإسكان في المستوى العلوي (2) اكبر منه في المستوى السفلي (1). وهذا الشرط يتعارض مع التوزيع الحراري في حالة الإتزان والمعطى في معادلة بولتزمان (9.1) ، وهذا يعرف **مقلوب الأسكان** *population inversion* (كما في الشكل 9.1) .



شكل (9.1) منحنيات كثافة الإسكان في مستويات الطاقة (a) توزيع بولتزمان (b) التوزيع المقلوب.

فإذا توفر شرط المقلوب اسكاني فإن شدة الشعاع الضوئي ستزداد ، او بعبارة اخرى سيتضخم هذه الشدة لدى مرور الضوء خلال الوسط ووبعزى هذا الى ان الكسب *gain* من الإنبعث المستحث يزيد عن الخسارة الناتجة عن الإمتصاص . كما ينبعث الإشعاع المستحث في نفس اتجاه الشعاع الأولي *primary* ويكون في حالة تطاور معه ، وذلك وفقا لقواعد الأنماط في النظرية الكهرومغناطيسية التي تنص على ان الفوتون المضاف الى لنمط ما بواسطة الإنبعث المستحث يكون نسخة طبق الأصل عن الفوتونات الموجودة في هذا النمط .

#### ■ ثابت الكسب *The Gain Constant*

لتحديد مقدار التضخم في وسط ما ، نفرض ان شعاعا متوازيا ينتشر في هذا الوسط الذي يوجد به الإسكان المقلوب . في حالة هذا الإشعاع المتوازي، تكون كثافة الطاقة الطيفية  $u_\nu$  مرتبطة مع الإنشعاعية الطيفية  $I_\nu$  في الفترة الترددية  $\{ \nu, \nu + d\nu \}$  بالعلاقة التالية

$$u_\nu \Delta \nu = \frac{I_\nu \Delta \nu}{c} \quad (9.8)$$

بسبب ظاهرة دوبلر وظواهر الإتساع الخطي *line - broadening* ، فإن ليس كل الذرات في مستوى الطاقة تكون فعالة في عملية الإنبعث والإمتصاص في هذه الفترة من التردد . ولذلك ، عند اعتبار وحدة حجم  $(\Delta N_1)$  ، يكون عددا معينا من ذرات العدد الكلي  $(N_1)$  في مستوى الطاقة 1 مساهما في هذه العمليات . وتباعا ، يكون المعدل الزمني للقفزات الى اعلى يساوي

$$B_{12} u_\nu \Delta N_1 = B_{12} \left( \frac{I_\nu}{c} \right) \Delta N_1$$

وبالمثل ، يكون المعدل الزمني للقفزات الى اسفل يساوي

$$B_{21} u_\nu \Delta N_2 = B_{21} \left( \frac{I_\nu}{c} \right) \Delta N_2$$

حيث ان كل قفزة الى اعلى تنقص طاقة كمية  $h\nu$  من هذا الشعاع . بالمثل ، فإن كل قفزة الى اسفل تضيف نفس هذه الكمية من الطاقة . وعليه ، يكون صافي المعدل الزمني لتغير كثافة الطاقة الطيفية في الفترة  $\nu\Delta$  كما يلي

$$\frac{d}{dt} (u_\nu \Delta\nu) = h\nu(B_{21} \Delta N_2 - B_{12} \Delta N_1) u_\nu \quad (9.9)$$

في الزمن  $dt$  ، تنتقل الموجة الضوئية مسافة  $dx = cdt$  . وعليه ، يمكن اعادة كتابة معادلة (9.8) بالصورة التالية:

$$\frac{dI_\nu}{dx} = \frac{h\nu}{c} \left( \frac{\Delta N_2}{\Delta\nu} - \frac{\Delta N_1}{\Delta\nu} \right) B_{21} I_\nu \quad (9.10)$$

وهذه المعادلة تمثل المعدل الزمني لنمو الشعاع في اتجاه الإنتشار . بتكامل هذه المعادلة التفاضلية (9.10) ، نحصل على

$$I_\nu = I_{0\nu} e^{\alpha_\nu x} \quad (9.11)$$

حيث  $\alpha_\nu$  يسمى ثابت الكسب عند التردد  $\nu$  . ويعطى بالعلاقة التالية

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{c} \left( \frac{\Delta N_2}{\Delta\nu} - \frac{\Delta N_1}{\Delta\nu} \right) B_{12} \quad (9.12)$$

كما يمكن اشتقاق قيمة تقريبية لثابت الكسب عند مركز الخط الطيفي ، وذلك بإعتبار  $\Delta\nu$  تمثل عرض هذا الخط ، واستبدال  $\Delta N$ 's بالمقدار  $N$ 's ، نحصل على النتيجة التالية:

$$\alpha_{\max} \approx \frac{h\nu}{c\Delta\nu} (N_2 - N_1) B_{12} = \frac{\lambda^2}{8\pi\Delta\nu} (N_2 - N_1) A_{12} \quad (9.13)$$

حيث استخدمت العلاقة بين معاملات اينشتين  $A, B$  (معادلة 9.6) لإشتقاق معادلة (9.13) .

نلاحظ من هذه المعادلة ان قيمة  $\alpha$  تكون موجبة اذا كان  $N_2 > N_1$  . بينما اذا كان  $N_2 < N_1$  ( حالة الإتزان الطبيعي ) ، فإن  $\alpha$  تصبح سالبة القيمة ونحصل على حالة الإمتصاص ) .

#### ▪ منحنى الكسب *The Gain Curve*

لدراسة العلاقة بين الكسب والتردد يكون من الضروري اعتبار اتساع ( عرض ) الخط الطيفي . اذ تعود عدم حدية الخط الطيفي الى الحركة الحرارية . كما تعطي النظرية الحركية جزءاً من الذرات التي لها مركبات سرعة في اتجاه محور  $x$  ضمن الفترة  $\{u_x, u_x + \Delta x\}$  كالتالي

$$C e^{-au_x^2} \Delta u_x$$

حيث  $a = m/2kT$  ،  $C = (m/2\pi kT)^{1/2}$  بسبب ظاهرة دوبلر ، تبعث او تمتص هذه الذرات اشعاعا، ينتشر في اتجاه محور  $x$  و بتردد  $\nu$  . يختلف هذا الشعاع بشكل طفيف عن التردد الرنيني  $\nu_0$  لهذه الذرات عندما تكون في حالة سكون . كما يساوي هذا الإختلاف في التردد التالي

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{u_x}{c}$$

وبالتالي يكون عدد الذرات في اي مستوى ، والتي يمكنها امتصاص او انبعاث في مدى التردد  $\{\nu, \nu + \Delta\nu\}$ ، هو

$$\Delta N_i = N_i C e^{-\beta(\nu - \nu_0)^2} \frac{c}{\nu_0} \Delta\nu$$

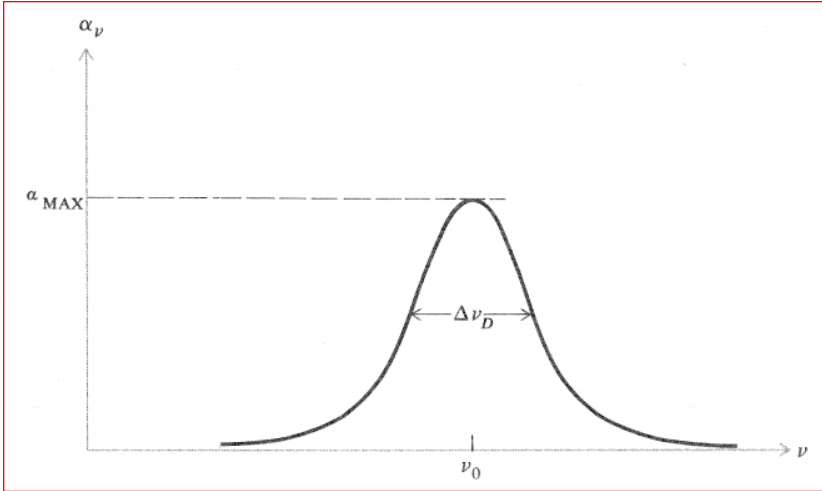
حيث

$$\beta = mc^2 / (2kT\nu_0^2)$$

عند التعويض بهذا المقدار في معادلة (9.12) ، تكون النتيجة كالتالي

$$\alpha_\nu = C e^{-\beta(\nu - \nu_0)^2} (N_2 - N_1) h B_{21} \quad (9.14)$$

من هذه المعادلة ، نجد ان الكسب الناتج عن توسيع دوبلر للخط الطيفي ، يتغير مع التردد حسب دالة جاوس *Gaussian function* . يوضح الشكل (9.2) العلاقة البيانية بين الكسب والتردد .



شكل (9.2) معامل التضخيم لخط الطيف المتوسط بواسطة ظاهرة دوبلر .

من هذا الشكل ، نلاحظ ان قيمة الكسب العظمى تحدث عند مركز الخط وتعطى بالعلاقة التالية

$$\alpha_{\max} = C(N_2 - N_1)hB_{21} = C(N_2 - N_1) \frac{\lambda_0^3}{8\pi} A_{21} \quad (9.15)$$

للمقارنة بين هذه المعادلة و القيمة التقريبية المعبر عنها في معاداة (9.13) ، نعتد على قياس عرض هذا الخط الطيفي المتوسع بظاهرة دوبلر . اي ، نحسب الإتساع عند منتصف القيمة العظمى *the width of half maximum* و يتم ذلك بمساواة العامل الأسّي في معاداة (9.14) ،  $e^{-\beta(v-v_0)^2}$  ، بمقدار  $\frac{1}{2}$  . وعليه ، نحصل على ما يلي :  $v - v_0 = (\ln 2/\beta)^{1/2}$  . كما يكون العرض الكامل يساوي ضعف هذا المقدار ، او  $\Delta v_D = \sqrt{2(\ln 2/\beta)}$  (شكل 9.2) . بإستخدام تعريفات B , C السابقة ، نجد ان

$$\alpha_{\max} = 2 \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \frac{\lambda_0^2}{8\pi \Delta v_D} (N_2 - N_1) A_{21} \quad (9.16)$$

وحيث ان القيمة العددية للمقدار  $2\sqrt{\ln 2/\pi}$  تساوي 0.939 ، لذلك يمكن اعتبار معاداة (9.13) صحيحة في هذه الحالة .

#### (9.4) طرق إنتاج مقلوب الإسكان *Methods of Producing a Population Inversion*

هناك عدة طرق لإنتاج المقلوب الإسكاني اللازم لحدوث عملية التضخيم الضوئي ، ومن هذه الطرق الشائعة الإستعمال ما يلي :

(1) الضخ الضوئي ( التهييج الفوتوني ) Optical pumping

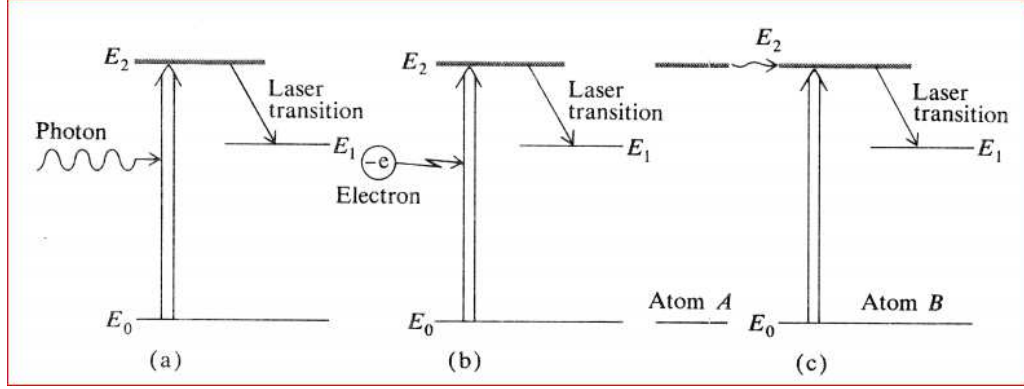
(2) التهييج الإلكتروني Electron excitation

(3) التصادمات الذرية غير المرنة Inelastic atom – atom collisions

(4) التفاعلات الكيميائية Chemical reactions .

في حالة الضخ الضوئي ، يستخدم مصدر ضوئي خارجي لإنتاج اسكان عالي في بعض مستويات طاقة خاصة في وسط الليزر ، ويتم هذا بعملية الإمتصاص الضوئي الإنتقائي *selective optical absorption* ( الشكل 9.3a ) .

وعادة تستخدم طريقة التهييج هذه في عملية إنتاج ليزر الحالة الصلبة ( ليزر روبي *Ruby laser* ) .



شكل (9.3) مخطط عمليات انتاج مقلوب الإسكان .

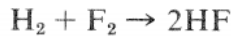
بينما في الطريقة (2) ، يتم استخدام الإلكترونات المثيجة في التفريغ الغازي لإنتاج المقلوب الإسكاني (شكل 9.3b) ، وتستخدم هذه الطريقة في انتاج ليزرات الأيونات الغازية ، مثل ليزر الأرجون argon laser . بهذا النوع من التهيج لوسط الليزر ، يحمل الليزر نفسه تيار التفريغ . وتحت شروطا ملائمة للضغط و التيار ، تهيج الكترونات التفريغ الذرات النشطة لإنتاج اسكان عالي في مستويات معينة بالمقارنة مع المستويات الدنيا .

اما في الطريقة (3) ، يتم استخدام التفريغ الكهربائي كما يلي : يتم مزج غازين معا بحيث يمكن ان يكون هناك تصادما بين نوعين مختلفين من ذراتهما ( A, B ) ، اللواتي في بعض الحالات المثيجة ( A\*, B\* ) . في هذه الحالة تحدث عملية نقل التهيج بين الذرتين كما يلي:



إذا كانت الحالة المثارة لأحد هذه الذرات ، مثل  $A^*$  ، شبه مستقرة *metastable* ، فإن وجود الغاز B يلعب دور المخرج لهذا التهيج . وعليه ، من الممكن ان يصبح المستوى المثار في الذرة B مالكا لإسكان اعلى بالنسبة الى المستويات الذرية السفلى ، لذلك تتحل الذرة B بالإشعاع ( كما في الشكل 9.3c ) . وهذا ما يحدث في حالة انتاج ليزر هيليوم – نيون *helium- neon laser* ، حيث تهيج ذرة النيون بواسطة ذرة الهيليوم المثارة .

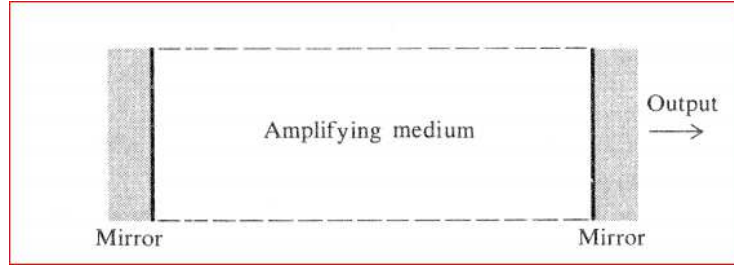
كما تحدد الطريقة الرابعة ( الطريقة الكيميائية ) نوعا من الليزرات تعرف باسم *الليزرات الكيميائية chemical lasers* . هنا يخضع الجزيء الى عملية التغير الكيميائي الذي من احد نتائجه يكون جزيء او ذرة في حالة مثارة وتحت شروط مناسبة يحدث المقلوب الإسكاني نتيجة لهذه العملية . كمثال على ذلك ، ليزر فلوريد الهيدروجين الكيميائي الذي تهيج فيه جزيئات فلوريد الهيدروجين كنتيجة للتفاعل التالي





## (9.5) اهتزازة الليزر *Laser Oscillation*

تتكون الفجوة البصرية او ما يعرف برنان الليزر *Laser Resonator* من مرأتين (مستوية او منحنية) وبينهما يوضع الوسط المضخم (شكل 9.4). فاذا توفر المقلوب الإسكاني في هذا الوسط بشكل كاف، فإن ذلك يبني اشعاعا كهرومغناطيسيا ينتشر على صورة امواج ساكنة *standing waves* ما بين المرأتين. وعادة، تكون احد هذه المريا مفضضة جزئيا للسماح بخروج الطاقة الإشعاعية من هذا الرنان.



شكل (9.4) ترتيب الليزر الأساسي .

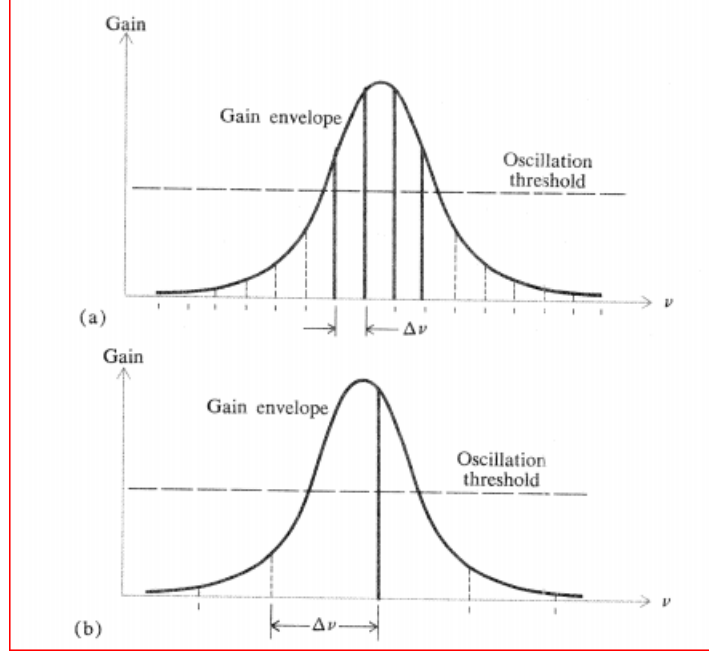
في حالة العواكس المستوية، تكون الفجوة البصرية مماثلة لمقياس تداخل فابري-بيرو. تحدث اشربة المرور *pass bands* في هذا الرنان عند عدد لانهايي من الترددات المتساوية التباعد، اي

$$\dots, \nu_n, \nu_{n+1}, \nu_{n+2}, \dots$$

كما يكون الفرق بين هذه الأشربة المتعاقبة مساويا لمقدار من المدى الطيفي الحر الذي يعطى كالتالي

$$\nu_{n+1} - \nu_n = \frac{c}{2d}$$

حيث  $c$  سرعة الضوء،  $d$  المسافة بين العواكس (المرأتين). وتعرف هذه الترددات بالأنماط الطولية للرنان *longitudinal modes*. كما يمكن الحصول على التذبذب الأشعاعي عند واحدة او اكثر من هذه الترددات الرنينية وهذا يعتمد على عرض منحنى الكسب وعلاقته مع التباعد النمطي *mode spacing* (الشكل 9.5). عمليا، تهتز معظم الليزرات في الحال بعدة انماط.



شكل (9.5) ترددات الإهتزازة في الليزر (a) اربعة انماط طولية (b) نمط واحد .

لتحديد جودة الفجوة البصرية في انتاج شعاع ليزر حاد *sharp* ، يجب تعيين الكمية التي تعرف بمعامل  $Q$  لهذه الفجوة (رنان الليزر) ، ويعرف هذا المعامل كما يلي :

$$Q = \frac{\nu}{\Delta\nu} = \frac{\nu_0}{\Delta\nu}$$

مثال (1)

احسب مقدار  $Q$  لشعاع ليزر اذا كان طول الفجوة البصرية  $1m$  وكان متوسط التردد  $\nu_0 = 4.75 \times 10^{14} \text{ Hz}$

الحل

$$\Delta\nu = \frac{c}{2d} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{(2)(1)m} = 1.5 \times 10^8$$

$$Q = \frac{4.75 \times 10^{14}}{1.5 \times 10^8} = 3 \times 10^6$$

▪ شرط العتبة للإهتزازة *Threshold Condition for Oscillation*

كما ورد سابقا، تنمو الإشعاعية للحزمة الضوئية المتوازية في الوسط المضخم وفقا للمعادلة التالية :

$$I_\nu = I_{0\nu} e^{\alpha_\nu x}$$

لنفرض ان موجة ما بدأت من نقطة ما وانتقلت ذهابا وإيابا بين المرآتين في فجوة الليزر . في الإياب تخسر هذه الموجة جزء من طاقتها  $\delta$  بفعل التشتت والانعكاس عند سطوح المرايا . من اجل ان يتذبذب شعاع الليزر ، يجب ان يتساوى او يزيد مقدار الكسب عن مقدار الفقد  $loss$  ، اي

$$I_\nu - I_{0\nu} \geq \delta I_\nu$$

او ، ان يتحقق الشرط المكافئ التالي

$$e^{\alpha_\nu 2l} - 1 \geq \delta \quad (9.17)$$

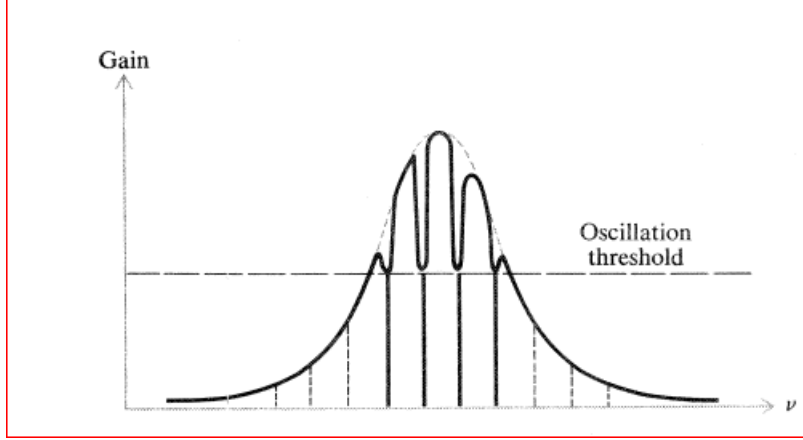
حيث  $l$  هو الطول الفعال للوسط المضخم . اذا كان  $\alpha_\nu 2l \ll 1$  فإنه يمكن التعبير عن شرط التذبذب كما يلي

$$\alpha_\nu 2l \geq \delta \quad (9.18)$$

اما اذا زادت قيمة الكسب عن قيمة الفقد عند تردد ما ، فإن التذبذب ينمو حتى يصل الى شرط الإتزان ويكون الفقد الكسري ثابتا ولا يعتمد على سعة هذه الذبذبة. وعليه ، يحدث **نضوبا depletion** في الوسط ، مما ينتج عنه تضائل الفرق الإسكاني  $N_2 - N_1$ . كذلك ينخفض مقدار الكسب لدرجة ما تتحقق عنده المعادلة التالية

$$\alpha_\nu 2l = \delta \quad (9.19)$$

كما يحدث هذا النضوب في الشريط الطيفي المتمركز عند تردد الإهتزازة وهذا يعرف **الثقب الحارق hole burning** . كما يكون شكل هذا الثقب بصورة مقلوب المنحنى الرنيني ويشبه منحنى الرنين للمتذبذب التوافقي المعروف **بملف لورنتز Lorentz profile** . كما يكون اتساع هذا الملف مساويا لمقلوب زمن الحياة الإشعاعي للذرة . اذا كان هذا الإتساع الإشعاعي اكبر من اتساع منحنى الكسب فإن كل الذرات المثارة تكون على اتصال مع نمط الليزر المهتز ، وتسمى هذه الحالة **بالتعريض المتجانس homogeneous broadening** . من الناحية الأخرى ، اذا كان الإتساع في قفزة الليزر اصغر من اتساع منحنى الكسب ، فإن قسما من الذرات فقط يكون مساهما في النمط . وتسمى هذه الحالة **بالتعريض غير المتجانس inhomogeneous broadening** . في هذه الحالة يسبب احتراق الثقب تعديلا في منحنى الكسب كما في الشكل 9.6 .



شكل (9.6) مغلف الكسب للثقب المحترق في الليزر.

### (9.6) نظرية الرنان الضوئي *Optical – Resonator Theory*

في البند (7.3) ، عرضت فكرة الأنماط المكانية *spatial modes* للإشعاع الكهرومغناطيسي في الفجوة المغلقة بشكل مختصر. كما تبين ان اي نمط معين يمكن تجديده بثلاثة اعداد صحيحة ذات علاقة مباشرة بنموذج الموجة الساكنة لهذا النمط. في حالة رنان الليزر ، تكون الفجوة غير مغلقة وتتشكل من سطحين عاكسين . مع ذلك ، فإن هذا الرنان يبقى داعما للأمواج الساكنة ذات الأبعاد الثلاثية ، و احيانا يقال له " شبه نمط " *quasi mode* . ومن الجدير بالذكر ، انه يحصل فقدان او تسرب جزء من الطاقة حول المرايا العاكسة ، وتسمى *diffraction loss* بفقدان الحيود .

ولعرض المسألة الرياضية المتعلقة بدراسة الرنان الضوئي ، نفرض ان مستويات احداثيات المرايا و فتحة النفوذ كمل يلي:  $(x, y)$  ،  $(x', y')$  ، على الترتيب ( كما في الشكل 9.7) . كما تكون هذه الحالة مكافئة لحيود الفتحات المتعددة *multiple apertures diffraction* .

اذا كانت  $U(x, y)$  ،  $U'(x', y')$  تمثل السعات المركبة للإشعاع عند سطوح المرآتين فإن باستخدام نظرية حيود فريزل-كيرشوف (5.2) نحصل على التالي

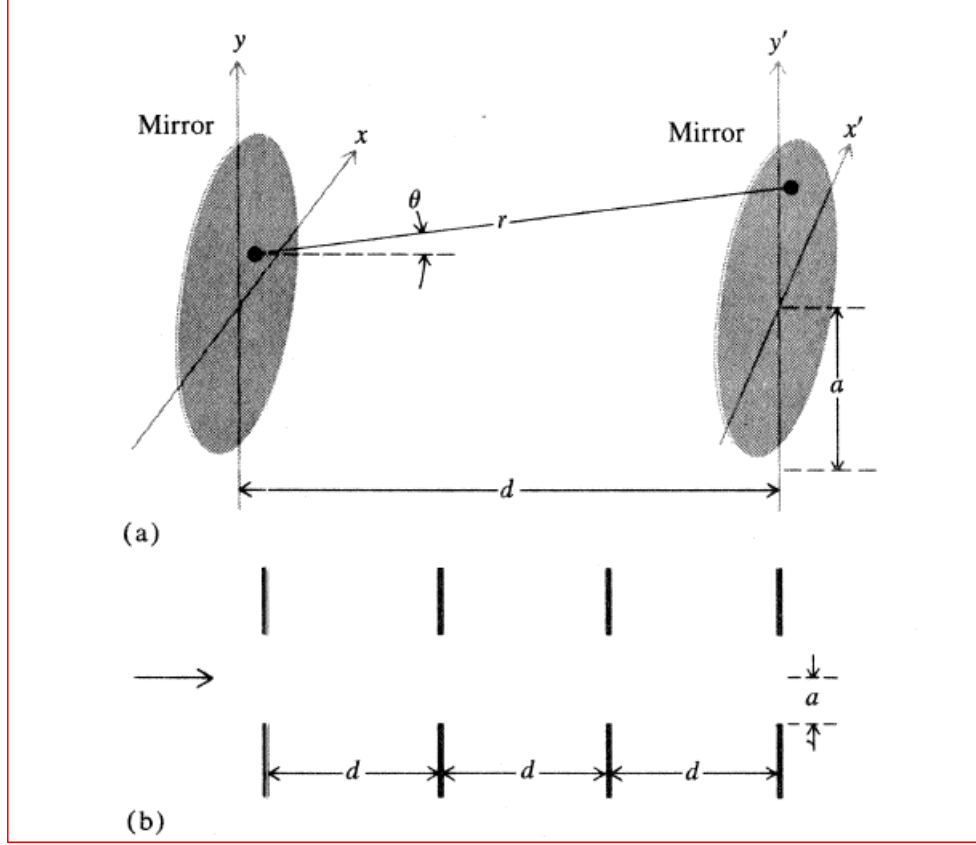
$$U'(x', y') = \frac{-ik}{4\pi} \iint U(x, y) \frac{e^{ikr}}{r} (1 + \cos \theta) dx dy \quad (9.20)$$

حيث

$$r = [d^2 + (x' - x)^2 + (y' - y)^2]^{1/2}$$

$$\cos \theta = \frac{d}{r}$$

اذا كانت المرايا متماثلة *identical* فإن في حالة الثبات *steady state* و بعد انعكاس الشعاع عدة مرات ذهابا وإيابا بين هذه المرآة ، تصبح  $U, U'$  متماثلة ما عدا بمعامل ثابت  $\gamma$  . في هذه الحالة ، يمكن اعادة كتابة معادلة (9.20) كما يلي:



شكل (9.7) (a) الترتيب الهندسي لفجوة ليزر فابري-بيرو. (b) مسألة الحيود المتكرر المكافئة.

$$\gamma U(x', y') = \iint U(x, y) K(x, y, x', y') dx dy \quad (9.21)$$

حيث

$$K(x, y, x', y') = \frac{-ik}{4\pi} (1 + \cos \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (9.22)$$

معادلة (9.21) هي معادلة تكاملية للدالة المجهولة  $U$ . وتسمى الدالة  $K$  لب (قلب) المعادلة  $kernel$  وتعرف  $\gamma$  بالقيمة الخاصة  $eigenvalue$ . يوجد عدد لانهائي من الحلول لهذه المعادلة  $U_n, n = 1, 2, 3, \dots, etc$  لكل قيمة من القيم الخاصة المرافقة  $\gamma_n$  وهذه الحلول المختلفة تقابل الأنماط العادية للرنان. عند التعبير عن  $\gamma_n$  بالصورة الرياضية التالية

$$\gamma_n = |\gamma_n| e^{i\phi_n} \quad (9.23)$$

$$\gamma_n = |\gamma_n| e^{i\phi_n} \quad (9.23)$$

، نجد ان  $|\gamma_n|$  تحدد نسبة السعة وكذلك تعطي  $\phi_n$  مقدار ازاحة الطور المرافق للنمط المفروض . كنا تمثل الكمية  $1-|\gamma_n|^2$  مقدار الطاقة المفقودة في عملية الحيود في كل قفزة .

وكان العالمان **فوكس ولي Fox and Li** من اوائل من درسوا هذه المعادلة التكاملية (9.21) بطريقة التحليل العددي لإيجاد حلولاً مرافقة للقيم الخاصة . كما توصل العالمان **بويد و جوردن Boyd and Gorden** الى الحلول الجبرية لهذه المعادلة باستخدام المرآيا المستوية والمنحنية في عمل رنان فابري - بيرو . مع ان الحل الدقيق للمعادلة التكاملية متوفرة ، غير ان من الممكن الحصول على حلول تقريبية مبسطة باستخدام نفس الخطوات المشروحة في حالة حيود فرنهوفر . وعليه ، تؤول معادلة (9.22) الى التالي

$$K(x,y,x',y') = C e^{-ik_1(xx'+yy')} \quad (9.22)$$

حيث  $C, k_1$  ثوابت.

وعليه، تؤول معادلة (9.21) الى الصورة التالية

$$\gamma U(x',y') = C \iint U(x,y) e^{ik_1(xx'+yy')} dx dy \quad (9.24)$$

تبين هذه المعادلة (9.24) ان الدالة  $U(x,y)$  ما هي الا **تحويلها الفورييري** وابسط هذه الدوال هو الدالة **الجوسية** او *Gaussian function* ، او

$$U(x,y) = e^{-\rho^2/w^2} = e^{-(x^2+y^2)/w^2} \quad (9.25)$$

حيث  $w$  ثابت التدرج ،  $\rho^2 = x^2 + y^2$  .

كما تكون معظم الدوال العامة التي هي تساوي تحويلاتها الفورييرية بصورة حاصل ضرب دوال تعرف **بكثيرة حدود هيرمت Hermite polynomials** مع دالة جوس ، تحديداً ،

$$U_{pq}(x,y) = H_p\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) H_q\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) e^{-(x^2+y^2)/w^2} \quad (9.26)$$

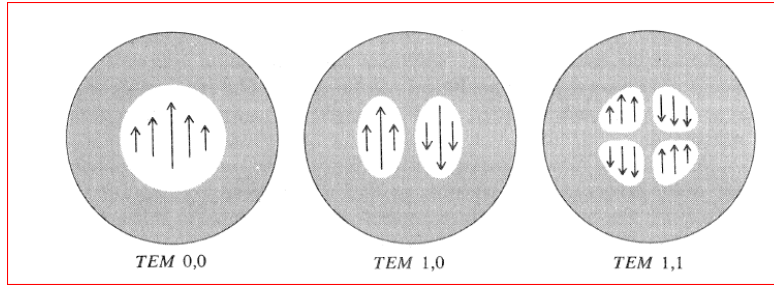
حيث تشير الأعداد الصحيحة  $p, q$  الى رتبة **كثيرة حدود هيرمت** وتقابل كل مجموعة  $(p,q)$  النمط المستعرض الخاص للرنان . بالرجوع الى الجداول الرياضية ، نجد ان الصور الرياضية لهذه الدوال كما يلي

$$H_0(u) = 1$$

$$H_1(u) = 2u$$

$$H_n(u) = (-1)^n e^{u^2} \frac{d^n}{du^n} e^{-u^2}$$

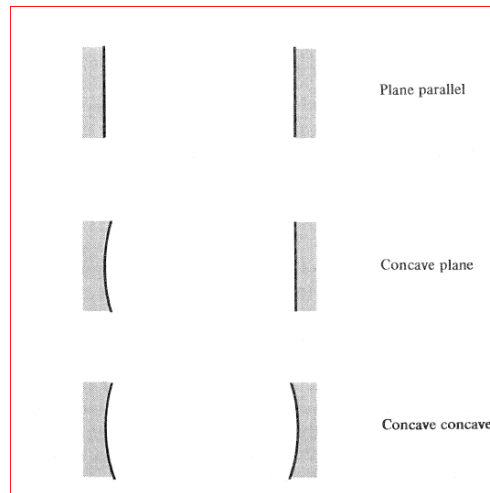
وعليه ، يكون ايسط نمط جاوسي مقابلا للمجموعة (0,0) ما يعرف بنمط  $TEM_{0,0}$  ، حيث يمثل المصطلح  $TEM$  اختصارا للموجات الكهرومغناطيسية المستعرضة في الفجوة . وعموما ، يستخدم المصطلح  $TEM_{n,p,q}$  للتعبير عن هذه الأنماط ، حيث  $n$  عدد صحيح وهو يمثل رقم النمط الطولي ، بينما تمثل  $p, q$  ارقام النمط المستعرض . يوضح الشكل (9.8) بعضا من نماذج الأنماط المنخفضة الرتبة .



شكل (9.8) توزيعات المجال عند المرآيا في انماط منخفضة الرتبة .

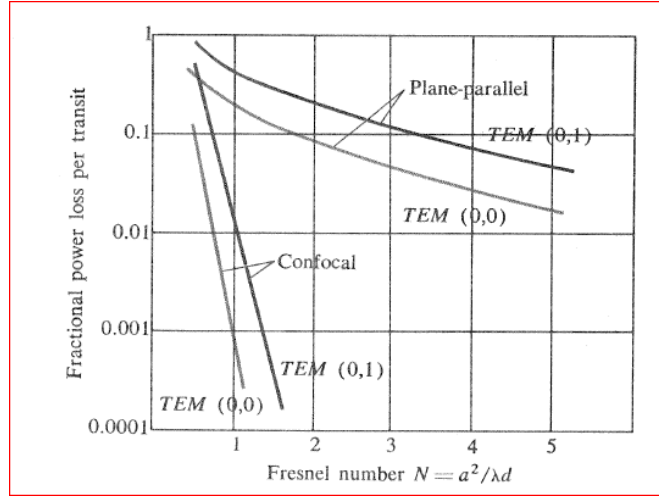
### ▪ تكوين الرنان - الثباتية Resonator Configuration - Stability

هناك عدة مجموعات من المرآيا المنحنية والمستوية التي يمكن استعمالها لفجوات الليزر ( كما في الشكل 9.9) .



شكل (9.9) بعض فجوات الليزر .

من احد هذه المجموعات التي هي الأكثر استخداما في ترتيبات الفجوة ما يعرف برنان البؤرة المشتركة *confocal resonator* . يتكون هذا الرنان من مرآتين كرويتين ومقررتين ، تفصل بينهما مسافة تساوي نصف قطر التكور، حيث يكون من الأسهل إصطاف *align* مرآيا هذه الفجوة بالمقارنة مع الفجوة ذات المرآيا المستوية والمتوازية *plane-parallel* . يبين الشكل (9.10) مخططا لمقدار فقد الحيويد ، وفقا لحسابات العالمين بويد وجوردن ، لبعض الأنماط المنخفضة الرتب لكل من الرانين ، البؤرة المشتركة والمستوى المتوازي .



شكل (9.10) منحنيات فقد الطاقة للنمطيين الأوليين في كلا الرانين .

في هذا الشكل ، تم رسم فقد القدرة لكل قفزة كدالة لعدد فريزل *Fresnel Number*  $N = a^2/\lambda d$  ، حيث  $a$  هو نصف قطر المرآة ،  $d$  المسافة بين المرآتين . في حالة رنان البؤرة المشتركة ، نلاحظ ان مقدار فقدان الطاقة للأنماط المنخفضة الرتب يكون صغيرا عند  $N > 1$  .

من الممكن تصنيف رنانات الليزر وفقا لمعيار *stability criterion* يسمى بالثباتية *stability* ويكون الرنان مستقرا اذا بقي الشعاع داخل الفجوة اثناء الإنعكاسات المتكررة بين المرآتين قريبا من محور *axis* الفجوة. عمليا ، وجد ان الثباتية لشعاع الليزر في الفجوة المتماثلة والمكونة من مرآتين لهما نفس نصف قطر الإنحناء تحقق اذا كانت المسافة بين هاتين المرآتين اقل من  $\square$  ضعف *twice* نصف قطر الإنحناء.

▪ حجم بقعة الليزر *spot size* :

يعتبر المعامل العددي  $w$  ، المدخل في معادلتني (9.25) ، (9.26) ، مقياسا لتوزيع الطاقة الجانبية *lateral distribution of energy* للشعاع الضوئي داخل الرنان . رياضيا ، تهبط قيمة دالة جاوس  $e^{-\rho^2/w^2}$  الى المقدار  $e^{-1}$  عندما تكون قيمة  $\rho$  ( المسافة الجانبية من المحور البصري) تساوي  $w$  . وعلية تهبط هذه الطاقة ( مربع شدة المجال) الى المقدار  $e^{-2}$  من قيمتها العظمى . لذلك ، تسمى  $w$  ب " حجم البقعة " للنمط السائد (0,0) .



عموماً ، تكون  $w$  دالة للموقع الطولي في اي رنان ، لنفرض ان  $z$  تمثل المسافة الطولية مقاسة من نقطة المنتصف بين المرآتين . يصبح هذا المعامل كما بينه العالمين السابقين كالتالي

$$w^2 = w_0^2 + \frac{\lambda^2 z^2}{\pi^2 w_0^2} \quad (9.27)$$

حيث  $\lambda$  طول موجة الشعاع ،  $w_0$  تمثل حجم البقعة عند المركز ، تتحدد قيمة هذا المعامل بأصاف اقطار انحناء المرآتين والمسافة بينهما . في حالة الفجوة المكونة من مرآتين ، حيث لكل منهما نصف قطر  $R$  والبعد بينهما  $d$  ، يكون المعامل  $w_0$  كما يلي

$$w_0^2 = \frac{\lambda}{\pi} \left[ \frac{d}{2} \left( R - \frac{d}{2} \right) \right]^{1/2} \quad (9.28)$$

ايضا ، يعطى نصف قطر انحناء سطوح الموجة الساكنة بالعلاقة التالية

$$r_c = z + \frac{d(2R - d)}{4z} \quad (9.29)$$

اما في حالة رنان البؤرة المشتركة (  $R=d$  ) ، نجد ان حجم بقعة الليزر عند المركز يساوي التالي

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda d}{2\pi}}$$

كما يكون حجم البقعة عند سطوح المرآتين ، حيث  $z = \pm d/2$  ، كما يلي

$$w = \sqrt{\frac{\lambda d}{\pi}}$$

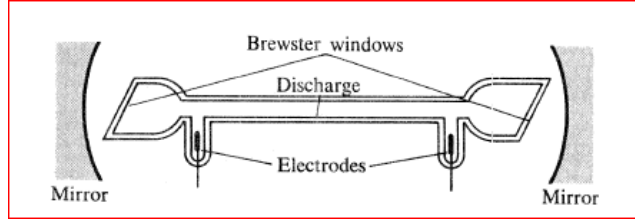
يمثل الشكل (9.11) حالة رنان البؤرة المشتركة .



شكل (9.11) نموذج الموجة الساكنة و التوزيع الجانبي لنمط  $TEM_{0,0}$  في رنان البؤرة المشتركة .

في هذا الشكل ، رسمت سطوح الطور الثابت لتوضيح انحناء الأمواج الساكنة في الفجوة . نلاحظ ان عند سطوح المرآيا تتطابق سطوح الموجة مع انحناء سطح المرآة . ايضا ، نجد ان حجم البقعة يكون اصغر ما يمكن *minimum* ويصبح سطح الموجة مستويا *planar* عند المركز .

## (9.7) الليزرزات الغازية Gas Lasers



شكل (9.12) تصميم ليزر غازي مثالي .

يمثل الشكل (9.12) ترتيبا فيزيائيا لليزر الغازي ، حيث تكون الفجوة البصرية مزودة بمرآيا خارجية وتكون هذه المرآيا مطلية بعدة طبقات من فيلم عازل لزيادة مقدار انعكاسيتها عند طول الموجة المطلوبة . ايضا ، يتم ترتيب المرآيا الكروية في تكوين ( هيكل ) البؤرة المشتركة لتقليل فقد الطاقة ولتسهيل ضبط الفجوة .

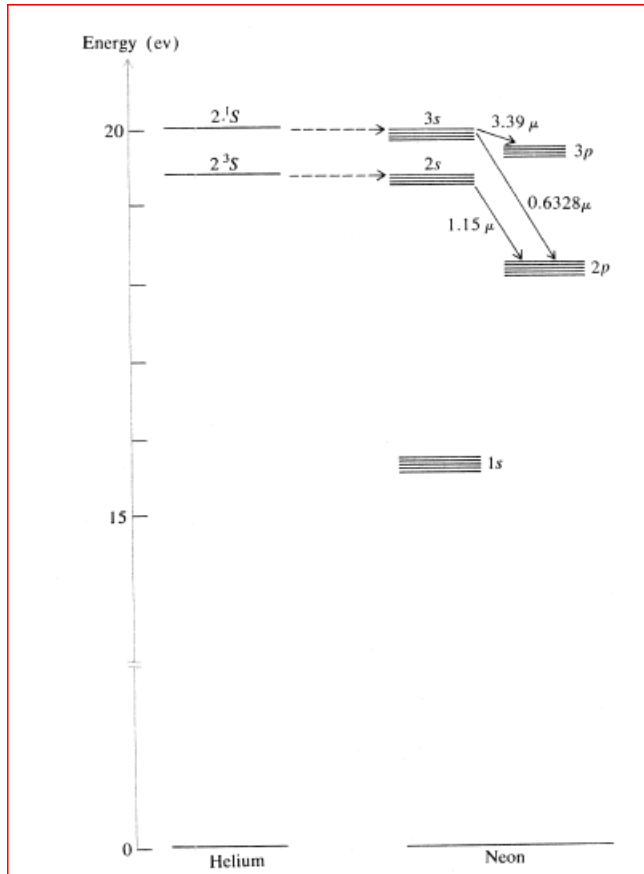
كما تكون اطراف انبوبة الليزر متكيفة *fitted* مع نوافذ بريوستر *Brewster windows* للحصول على اكبر قيمة ممكنة من الشفافية *transparency* . وبهذا الترتيب ، يكون الليزر الخارج من الجهاز مستقطبا خطيا *TM* . اي ، يكون تذبذب شعاع الليزر في هذا الإتجاه الإستقطابي متناميا ويصبح مهيمنا على الإستقطاب *TE* العمودي .

كما يتم إضافة التهييج الكهربائي الخارجي بواسطة الطرق التالية: (1) التفريغ بالتيار المستمر (2) التفريغ بالتيار المتناوب (3) استخدام نبضات عالية الجهد (4) التفريغ بين مجسات عالية التردد .

فيما يلي نتاول بالتفصيل ليزر الهيليوم - النيون *The Helium – Neon Laser* كمثال على الليزرزات الغازية .

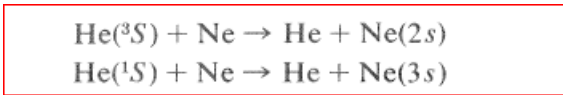
### ■ هيليوم – نيون ليزر :

يوضح الشكل (9.13) مخططا لمستويات الطاقة في نظام هذا الليزر . تتم اثاره ذرات الهيليوم بواسطة تصادم هذه الذرات مع الكترولونات التفريغ .



شكل (9.13) مخطط مستويات الطاقة في ليزر الهيليوم- النيون .

عملياً، يتم بناء الإسكانات في المستويات شبه المستقرة  $^1S$  ,  $^3S$  : *metastable states* في ذرات الهيليوم بسبب عدم توفر القفزات الضوئية المسموح بها الى المستويات السفلية . من هذا الشكل (9.13) ، نلاحظ ان مستويات الطاقة لذرات النيون  $2s$  ,  $3s$  تقع بالقرب من مستويات الطاقة شبه المستقرة لذرات الهيليوم . وعليه ، يكون هناك احتمالية عالية لنقل الطاقة عند التصادم بين ذرات الهيليوم شبه المستقرة مع ذرات النيون غير المثارة . وتكون هذه التنتقلات في الطاقة كالتالي



عند توفر شروط التفريغ المناسبة تحدث عملية القلب الإسكاني للمستويات  $\text{Ne}(2s)$  ,  $\text{Ne}(3s)$  . وهذه الشروط هي القيم المثالية للضغط هي  $1.0 \text{ torr}$  ونسبة الهيليوم الى النيون هي 7:1 .

عملياً ، تكون اطوال الأمواج لشعاع هذا الليزر والمقابلة للقفزات التالية كما يلي:

$$3s_2 \rightarrow 2p_4 \text{ 632.8 nm}$$

$$2s_2 \rightarrow 2p_4 \text{ 1.1523 } \mu$$

$$3s_2 \rightarrow 3p_4 \text{ 3.39 } \mu$$

### ■ انواع مختلفة من الليزر الغازية

باستخدام تقنية التفريغات الكهربائية في الغازات النقية و المخلوطة ، تم انتاج اشعة ليزرية ذات اطوال امواج متنوعة وتقع ضمن المنطقة تحت الحمراء وحتى فوق بنفسجية . ويمكن القول ان كل الغازات الخاملة في الحالة النقية قد تستخدم لتوليد اشعة ليزر . على سبيل المثال ، يولد ليزر ايون الأرجون شعاعا من الليزر المرئي بعدة اطوال موجية في المنطقة الزرقاء . كما تم استخدام التفريغات النبضية *pulsed discharges* في الأوساط المعدنية البخارية ، مثل الخارصين ، الزئبق ، الرصاص ، الخ.....، لإنتاج اشعة الليزر . كما وجد ان التفريغات في الغازات الجزيئية تؤدي الى المقلوب الإسكاني عن طريق القفزات الى جزيئات متنوعة . كمثال على ذلك ، يولد ليزر النيتروجين الجزيئي  $N_2$  شعاع ليزر في المنطقة تحت الحمراء و المنطقة فوق البنفسجية ، وليزر ثاني اكسيد الكربون  $CO_2$  الذي يهتز في المنطقة  $10\mu$  . يبين الجدول (9.1) انواعا مختلفة من اجهزة توليد اشعة الليزر الغازية بأطوال موجية مختلفة ( امواج متصلة و امواج نبضية *continuous and pulsed waves* ) .

Gas or Gas Mixture	Active Species	Principal Laser Wavelengths ( $\mu$ )	Remarks
He-Ne	Ne	0.6328, 1.15, 3.39	cw*
Ne	Ne	0.5401, 0.6143, 1.15	pulsed high gain
Ne	Ne <sup>+</sup>	0.3323, 0.3378, 0.3392	cw or pulsed
Ar	Ar <sup>+</sup>	0.4765, 0.4880, 0.5145	cw or pulsed
Kr	Kr <sup>+</sup>	0.5208, 0.5309, 0.5862, 0.6471	cw or pulsed
Xe-He	Xe	3.507, 5.574	cw high gain
Xe	Xe <sup>+</sup>	0.4603, 0.5419, 0.5971	cw or pulsed
Ne-O <sub>2</sub> , Ar-O <sub>2</sub>	O	0.8446	cw
N <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	0.3371	pulsed high gain
Air, N <sub>2</sub>	N <sup>+</sup>	0.5679	pulsed
He-Cd	Cd <sup>+</sup>	0.3250, 0.4416	cw high efficiency
CO <sub>2</sub> -N <sub>2</sub> -He	CO <sub>2</sub>	10.6	pulsed and cw, high power and high efficiency
H <sub>2</sub>	H <sub>2</sub>	0.12, 0.17	first vacuum ultraviolet laser
H <sub>2</sub> O	H <sub>2</sub> O	27.9, 118.6	long wavelength
CH <sub>3</sub> CN-NH <sub>3</sub>	HCN	337	very long wavelength

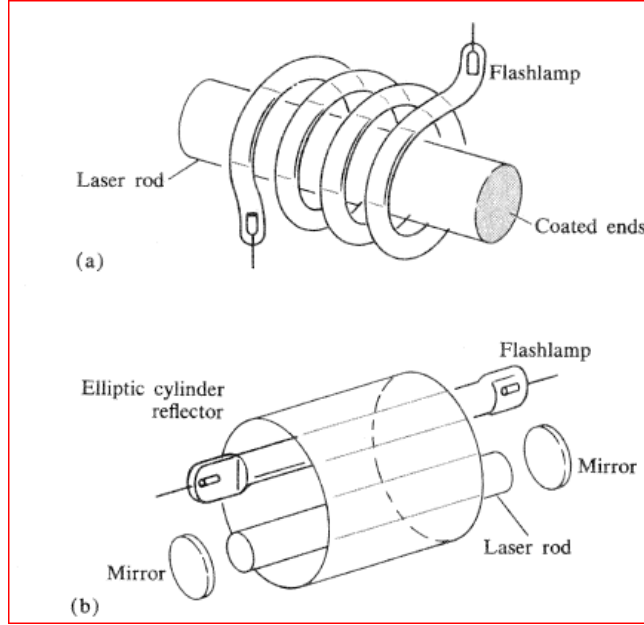
\* Continuous wave. cw.

جدول (9.1) امثلة على بعض انواع الليزر الغازية .

### (9.8) ليزرات الحالة الصلبة المضخة □ وئيا *Optically Pumped Solid State Lasers*

في تصميم ليزرات الحالة الصلبة ، تكون الذرات لوسط الليزر مغروسة *embedded* في هذا الوسط الصلب . عادة ، تستخدم البلورات والزجاج بشكل مصفوفات داعمة في هذا التطبيق وتصنع هذه الدعائم ( البلورات والزجاج ) بشكل قضبان اسطوانية ذات اطراف مصقولة ومستوية بدرجة عالية ، كما يؤلف هذا القضيب الفجوة البصرية عن طريق تغليف

*coating* طرفيه او بلصق مرآيا خارجية عند هذه الأطراف . كما يتم الضخ الضوئي للذرات النشطة بإستخدام مصدر ضوئي خارجي ( عالي الشدة ، مثل مصابيح الزيون الوميضية *Xenon flash lamps* ) . يوضح الشكل (9.14) الترتيبات الهندسية لليزر الحالة الصلبة .



شكل (9.14) التصميم النموذجي لليزر الحالة الصلبة المضخة ضوئيا .

من الأنواع الأولية لليزر الحالة الصلبة ما يعرف **ليزر الروبي** *The Ruby Laser* ، حيث يصنع قضيب هذا الليزر من سبيكة مكونة من  $(Al_2O_3)$  مع ما نسبته 0.05 من مادة  $(Cr_2O_3)$  ، وهذا التركيز يعطي لونا قرمزيا *pink* للسبيكة بسبب وجود ايونات  $Cr^{3+}$  التي تحل مكان ذرات الألومنيوم في الشبكة البلورية . يحدد الشكل (8.17) في الفصل السابق مستويات الطاقة لأيون  $Cr^{3+}$  في بلورة الروبي . في عمل هذا الليزر، يتم امتصاص الضوء المضخ بواسطة هذه الأيونات وهذا يرفعها من الحالة الأرضية  $4A$  الى الحالات المثيجة  $4T_1$  او  $4T_2$  . ومن ثم يحدث الإنتقال السريع من هذه المستويات الى المستوى  $2E$  . وبسبب البطء في الإنحلال من هذا المستوى فإن التهيج الكافي يؤدي الى حدوث المقلوب الإسكاني بين الحالة  $2E$  والحالة  $4A$  ، وعندما يحصل هذا الشرط ، تحدث عملية التضخيم عند طول الموجة 6934 انجستروم . يكون شعاع الليزر الناتج على صورة نبضات ضوئية عالية الشدة .

إضافة الى ليزر الروبي ، تم تطوير عدد من السبائك التي يمكن استخدامها كمصادر لليزر الحالة الصلبة ، كما في الجدول (9.2) .

<i>Laser Ion</i>	<i>Host Material</i>	<i>Wavelength (<math>\mu</math>)</i>
Cr <sup>3+</sup>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0.6943
Nd <sup>3+</sup>	CaF <sub>2</sub>	1.046
	CaWO <sub>4</sub>	1.06
	Glass	1.06
	YAG	1.06
Ho <sup>3+</sup>	CaF <sub>2</sub>	2.09
Er <sup>3+</sup>	CaF <sub>2</sub> , glass	2.04
Tm <sup>3+</sup>	SrF <sub>2</sub> , CaWO <sub>4</sub>	1.9
Yb <sup>3+</sup>	Glass	1.1
U <sup>3+</sup>	BaF <sub>2</sub> , CaF <sub>2</sub>	2.5

جدول (9.2) بعض انواع ليزرات الحالة الصلبة.

## تمارين

- (9.1) اذا كان الخط الطيفي الأول لضوء الصوديوم (*D-line*) يقع عند  $590nm$  ويقابل القفزة من الحالة المثارة ( $3p$ ) الى الحالة الأرضية ( $3s$ ). جد طاقة هذه الحالة المثارة بوحدات الإلكترون فولت؟ .
- (9.2) جد النسبة الممثلة لعدد ذرات الصوديوم الموجودة في الحالة المثارة الأولى في مصباح الصوديوم الغازي عند درجة حرارة  $250^{\circ}C$ ؟ .
- (9.3) جد النسبة بين الانبعاث المستحث الى الانبعاث التلقائي عند درجة حرارة  $250^{\circ}C$  لخط الطيف  $D$  في الصوديوم؟ .
- (9.4) احسب مقدار ثابت الكسب في شعاع الليزر الذي يكون له المعاملات التالية :
- كثافة المقلوب الإسكاني  $10^{17} / cm^3$  ،  $\lambda = 700 nm$  ، عرض الخط  $= 1nm$  ، فترة حياة الانبعاث التلقائي  $= 10^{-7} s$  .؟
- (9.5) احسب كثافة المقلوب الإسكاني  $(\frac{g_2}{g_1} N_2 - N_1)$  في ليزر الهيليوم- النيون الذي يعمل بموجة  $633nm$  ، علما ان ثابت الكسب  $m / 2\%$  ، ودرجة الحرارة  $100^{\circ}C$  ، وفترة حياة الحالة العلوية ضد الانبعاث التلقائي للحالة السفلية تساوي  $10^{-7} s$  .؟
- (9.6) اذا كان حجم البقعة في ليزر الهيليوم يساوي  $0.5mm$  ، جد طول فجوة هذا الليزر؟ . اذا كانت هذه الفجوة مشتركة البؤرة وطول الموجة  $633 nm$  ، جد حجم بقعة الليزر المقابل للقفزة  $3.39\mu m$  في هذه الفجوة؟ .
- (9.7) اذا وضعت فتحات دخول *apertures* على المرآيا في فجوة مشتركة البؤرة لقمع الأنماط العالية ، وكان طول الفجوة  $1m$  . جد قطر هذه الفتحات التي تجعل قيمة الفقد لنمط  $TEM_{01}$  يساوي  $1\%$ ؟ . جد الفقد المقابل لنمط  $TEM_{00}$  وطول الموجة  $633nm$ ؟ . ( ارجع الى الشكل (9.10) .

## الفصل العاشر: البصريات اللاخطية

### Nonlinear Optic

سنتناول في هذا الفصل دراسة المفاهيم الأساسية للأوساط المادية التي تتميز بالخاصية اللاخطية التي تحدد طبيعة العلاقة الرياضية بين استقطاب هذه الأوساط وشدة المجال الكهربائي الخارجي المسلط عليها. كما سنقدم طريقة لنشر هذه العلاقة بصورة مفكوك مكون من عدة حدود ومن ثم ندرس تأثير كل حد في هذا المفكوك على كثافة استقطاب الأوساط المادية، أي خصائص البصريات اللاخطية من الدرجة الثانية والثالثة. كما سنعرض نظريات وتطبيقات خلط الأمواج الثلاثي والرابعي.

#### 10.1 مقدمة Introduction

خلال التطور التاريخي لعلم البصريات، كان الاعتقاد الراسخ أن جميع الأوساط الضوئية *optical media* تتمتع بالصفة الخطية عند تسليط مجال كهربائي خارجي عليها، أي تكون العلاقة الرياضية بين كثافة استقطاب هذه الأوساط وشدة هذا المجال من الدرجة الأولى. كما يترتب على هذه الفرضية النتائج التالية: عدم اعتماد الخصائص الضوئية للوسط (معامل الإنكسار، معامل الإمتصاص) على الشدة الضوئية *light intensity*، صلاحية تطبيق مبدأ التراكب الذي يعتبر حجر الزاوية للضوء الكلاسيكي، عدم حدوث أي تغيير في تردد الضوء عند مروره في الوسط. وأخيراً، عدم حدوث أي تفاعل بين شعاعين منتشرين في نفس الوسط المادي.

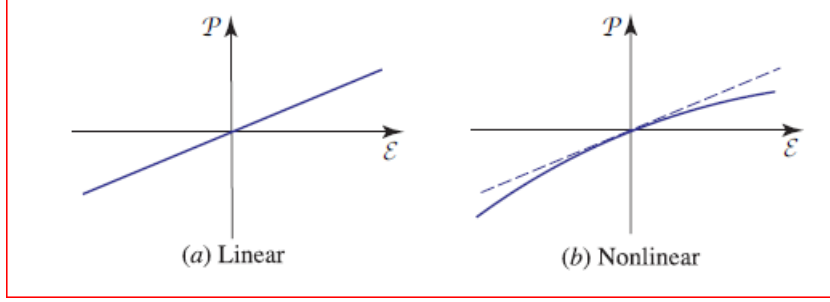
مع اختراع شعاع الليزر في عام 1960، أصبح بالإمكان اختبار سلوك الضوء في الأوساط المادية عند الشدات الضوئية العالية، حيث برهنت هذه التجارب أن الوسط المادي يظهر سلوكاً لاخطياً، ومن هذه المظاهر الضوئية ما يلي: اعتماد معامل الإنكسار في الأوساط اللاخطية على شدة الضوء المار خلالها، عدم صلاحية تطبيق مبدأ تراكب الأمواج في هذه الأوساط، التغيير في تردد الضوء لدى مروره في هذه الأوساط (أي، من الممكن تحول الضوء الأحمر إلى الأزرق). إضافة إلى ذلك، حدوث تفاعل بين الفوتونات المحصورة في هذه الأوساط اللاخطية الذي يمكن من استخدام شعاعاً ضوئياً ما للتحكم في شعاع آخر.

كما لا يلاحظ هذا السلوك الضوئي اللاخطي عند مرور الضوء في الفراغ *free space*. بالأحرى، تكمن ظاهرة اللاخطية في الوسط الذي يمر فيه هذا الضوء وليس في الضوء نفسه. ولذلك يمكن القول أن المجال الضوئي يعدل من خصائص الوسط الذي يمر فيه مما يؤدي إلى تعديل *modification* في المجال الأصلي.

#### 10.2 الأوساط البصرية اللاخطية Nonlinear Optical Media

في الأوساط العازلة *dielectric media*، إذا كانت العلاقة التي تربط بين كثافة الاستقطاب ( $\mathcal{P}$ ) وشدة المجال الكهربائي المسلط على هذا الوسط ( $\mathcal{E}$ ) هي  $\mathcal{P} = \epsilon_0 \chi \mathcal{E}$ ، حيث  $\chi$  القابلية الكهربائية للوسط، فإن هذا الوسط يعرف بالوسط الضوئي الخطي. من جهة أخرى، إذا كانت هذه العلاقة غير خطية (الشكل 10.1)، فإن الوسط العازل يكون وسطاً لاخطياً.





شكل(10.1) العلاقة بين كثافة الإستقطاب وشدة المجال الكهربائي (a) وسط خطي . (b) وسط لاخطي .

عمليا ، يمكن ان يعزى اصل الظاهرة اللاخطية للحالة المجهرية *microscopic* او الحالة العيانية *macroscopic* وذلك لأن كثافة الإستقطاب ( $\mathcal{P} = Np$ ) تساوي حاصل ضرب عزم ثنائي القطب الفردي ( $p$ ) المستحث من المجال الكهربائي الخارجي المسلط مع عدد الكثافة لعزوم ثنائيات الأقطاب  $N$  . وعليه، يكمن السلوك اللاخطي اما في  $p$  او في  $N$  .

لتوضيح ذلك ، تكون العلاقة بين  $p$  و  $\mathcal{E}$  خطية اذا كان مقدار  $\mathcal{E}$  صغيرا ولكن تصبح هذه العلاقة لاخطية عندما تكون مقدار المجال الكهربائي ضمن المدى :  $[10^5 - 10^8 V/m]$  . يمكن فهم ذلك من خلال اعتبار نموذج لورنتز Lorentz model البسيط الذي يفترض ان عزم ثنائي القطب يساوي  $p = -ex$  ، حيث  $x$  ازاحة كتلة ذات شحنة  $(-e)$  بفعل قوة المجال الكهربائي المسلط والتي تساوي  $-e\mathcal{E}$  . وبحسب قانون هو ، فإن هذه القوة المستعيدة *restoring force* تتناسب مع الإزاحة عن موقع الإتزان ، اي ان  $x$  تتناسب مع  $\mathcal{E}$  . وفي هذه الحالة ، تتناسب  $\mathcal{P}$  مع  $\mathcal{E}$  ويكون الوسط العازل خطيا . اما اذا كانت القوة المستعيدة دالة لاخطية للإزاحة ، تكون كلا من  $x$  ،  $\mathcal{P}$  دوال لاخطية للمجال الكهربائي  $\mathcal{E}$  وتباعا يكون هذا الوسط لاخطي .

كما من الممكن ان يعزى إستجابة المادة البصرية للضوء بشكل لاخطي الى اعتماد عدد الكثافة  $N$  على المجال الضوئي *optical field* ، كما في حالة وسط الليزر الذي يكون فيه عدد الذرات المحتملة لمستويات الطاقة والمشمولة في عمليات انبعاث وامتصاص الضوء معتمدا على شدة الضوء نفسه.

بما ان شدة المجالات الكهربائية الضوئية الخارجية تكون صغيرة مقارنة مع المجالات الذرية البينية *interatomic fields* - حتى باستخدام شعاع الليزر المركز - فإن اللاخطية تكون في العادة ضعيفة . وعليه ، تكون العلاقة بين  $\mathcal{P}$  و  $\mathcal{E}$  تقريبا خطية لقيم  $\mathcal{E}$  الصغيرة وتتحرف قليلا عن الخطية مع زيادة قيم  $\mathcal{E}$  ( شكل 10.1b ) . في هذه الحالات ، يمكن نشر هذه العلاقة باستخدام متسلسلة تايلور *Taylor* حول القيمة  $\mathcal{E} = 0$  ، او

$$\mathcal{P} = a_1\mathcal{E} + \frac{1}{2}a_2\mathcal{E}^2 + \frac{1}{6}a_3\mathcal{E}^3 + \dots,$$

.....(10.1)

حيث تمثل المعاملات  $a_1, a_2, a_3, \dots$  المشتقات الأولى، الثانية، والثالثة للدالة  $\mathcal{P}$  بالنسبة ل  $\mathcal{E}$  مقيمة عند  $\mathcal{E} = 0$  وتكون هذه المعاملات ثوابت مميزة للوسط. من الواضح، ان  $a_1 = \epsilon_0 \chi$ ، حيث  $\chi$  القابلية الخطية التي ترتبط مع معامل انكسار الوسط بالعلاقة:  $n^2 = \epsilon/\epsilon_0 = 1 + \chi$ .

يمثل الحد الثاني في معادلة (10.1) الرتبة الثانية للاخطية (التربيعية) *quadratic or second order* وهكذا لباقي حدود هذه المعادلة. من المؤلف، كتابة هذه المعادلة بالصيغة التالية

$$\mathcal{P} = \epsilon_0 \chi \mathcal{E} + 2d \mathcal{E}^2 + 4\chi^{(3)} \mathcal{E}^3 + \dots,$$

.....(10.2)

حيث  $d = \frac{1}{4} a_2$ ،  $\chi^{(3)} = \frac{1}{24} a_3$ ، وتصف هذه المعاملات قوة *strength* اللاخطية من الرتبة الثانية والثالثة، على الترتيب.

كما تمثل المعادلة (10.2) المميزات الرياضية للأوساط الضوئية اللاخطية. في حالة الأوساط ذات التماثل المركزي *Centro symmetric*، اي التي لا تتغير خواصها تحت التحويل  $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ ، تكون الدالة  $\mathcal{P}(\mathcal{E})$  دالة فردية. وعليه، فإن عكس اتجاه  $\mathcal{E}$  يؤدي الى عكس اتجاه  $\mathcal{P}$  بدون اي تغير في مقاديرها. في هذه الحالة، تنعدم قيمة  $d$ ، بينما تقع القيم المثالية لمقدار  $d$  للمواد البلورية العازلة في اشباه الموصلات والمواد العضوية المستخدمة في التطبيقات الفوتونية ضمن المدى  $[10^{-24} - 10^{-21} C/V^2]$ ، بينما تكون القيم المثالية لمقدار  $\chi^{(3)}$  لهذه المواد السابقة ضمن المدى  $[10^{-34} - 10^{-29} cm/V^3]$ .

### ▪ معادلة الموجة اللاخطية *The Nonlinear Wave Equation*

من المعلوم فيزيائيا ان التحكم في انتشار الضوء في الوسط اللاخطي يمكن وصفه بمعادلة الموجة التي سبق اشتقاقها باستخدام معادلات ماكسويل للوسط العازل المتجانس والتمائل. يتضمن تماثل الوسط توازي المتجهين  $\mathcal{E}$ ،  $\mathcal{P}$  دائما بحيث يحقق صحة المعادلة التالية

$$\nabla^2 \mathcal{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2}.$$

..... (10.3)

وببساطة يمكن كتابة كثافة الإستقطاب (معادلة 10.2) بدلالة مجموع حدين هما: الحد الخطي  $(\epsilon_0 \chi \mathcal{E})$  والحد اللاخطي  $(\mathcal{P}_{NL})$ ، او

$$\mathcal{P} = \epsilon_0 \chi \mathcal{E} + \mathcal{P}_{NL},$$

.....(10.4)

$$\mathcal{P}_{NL} = 2d\mathcal{E}^2 + 4\chi^{(3)}\mathcal{E}^3 + \dots$$

.....(10.5)

باستخدام معادلة (10.4) مع العلاقات التالية :  $c = c_0/n$ ,  $n^2 = 1 + \chi$ ,  $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  يمكن اعادة صياغة معادلة (10.3) على النحو التالي

$$\nabla^2 \mathcal{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = -\mathcal{S}$$

$$\mathcal{S} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{P}_{NL}}{\partial t^2}$$

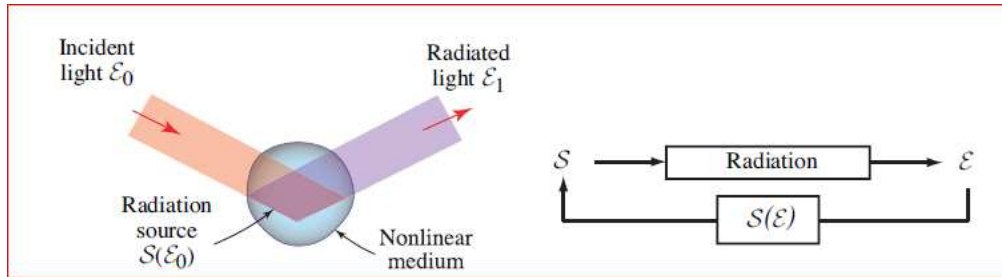
..... (10.7)

ايضا ، من السهل اعتبار معادلة (10.6) ممثلة لمعادلة الموجة التي يعتبر فيها الحد  $\mathcal{S}$  مصدرا مشعا في الوسط الخطي الذي معامل انكساره  $n$  وهذه المعادلة هي معادلة تفاضلية جزئية للمتغير  $\mathcal{E}$  ، وذلك لأن  $\mathcal{P}_{NL}$  دالة لاقضية لهذا المتغير . تعتبر هذه المعادلة اساس نظرية البصريات اللاخطية . سنتناول في البنود اللاحقة النهج التقريبي لحل هذه المعادلة ، ويعرف هذا النهج بتقريب بورن *Born* .

▪ نظرية تشتت البصريات اللاخطية : تقريب بورن

### Scattering Theory of Nonlinear Optics: Born Approximation

في معادلة (10.6) ، يكون مصدر الإشعاع  $\mathcal{S}$  دالة للمجال الكهربائي  $\mathcal{E}$  الذي بنفسه يكون مشعا. للتأكيد على هذه النقطة ، نعبر عن هذه الدالة كالتالي  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{E})$  . يمكن تمثيل هذه العملية كما في الشكل (10.2). لنفرض ان مجالا ضوئيا  $\mathcal{E}_0$  يسقط على وسط لاقطي محصورا ضمن حيزا ما ، يولد هذا المجال مصدرا اشعاعيا  $\mathcal{S}(\mathcal{E}_0)$  الذي يشع مجالا ضوئيا  $\mathcal{E}_1$  ، وهذا المصدر الإشعاعي الجديد  $\mathcal{S}(\mathcal{E}_1)$  يشع مجالا آخر  $\mathcal{E}_2$  وهكذا دواليك .



شكل (10.2) تقريب بورن الأول .

وبناء على ذلك ، يمكن استخدام الحل التكراري *iterative solution* ، اذ تسمى الخطوة الأولى في هذا الحل بتقريب بورن الأول *first Born approximation* . بينما تعرف الخطوة الإضافية الثانية في هذه العملية بتقريب بورن الثاني وهكذا . في حالة الشدة الضوئية الضعيفة ( اي ان اللاخطية تكون صغيرة ) ، يكون تقريب بورن الأول كاف . في هذا التقريب ، يمكن اعتبار انتشار الضوء خلال الوسط اللاخطي كعملية تشتت للضوء الساقط في الوسط ويتحدد هذا الضوء المتشتت من الضوء الساقط بخطوتين هما

(1) يستخدم الضوء الساقط  $\mathcal{E}_0$  لتحديد الكثافة الإستقطابية اللاخطية  $\mathcal{P}_{NL}$  ومنها يمكن تعيين مصدر الإشعاع  $\mathcal{S}(\mathcal{E}_0)$  .

(2) يتعين المجال المتشتت  $\mathcal{E}_1$  من مصدر الإشعاع بإضافة موجات كروية مصاحبة مع نقاط المصدر المختلفة .

نفرض ان المجال الإبتدائي  $\mathcal{E}_0$  يحتوي على موجة احادية اللون او اكثر من موجة بترددات مختلفة . تحدد معادلة (10.5) كثافة الإستقطاب اللاخطية  $\mathcal{P}_{NL}$  وتقيم دالة المصدر  $\mathcal{S}(\mathcal{E}_0)$  بإستخدام معادلة (10.7) . بما ان هذه الدالة لاخطية ، لذلك تنشئ ترددات جديدة . وعليه ، يبعث هذا المصدر مجالا ضوئيا  $\mathcal{E}_1$  بتردد غير موجود في الموجة الأصلية  $\mathcal{E}_0$  . هذا يؤدي الى العديد من الظواهر المشوقة والتي يمكن توظيفها لعمل اجهزة ضوئية لاخطية .

تعتمد المفاهيم المقدمة في البنود (10.2) و (10.3) على تقريب بورن الأول .

### (10.3) البصريات اللاخطية من الرتبة الثانية Second- Order Nonlinear Optics

في هذا البند ، نبحث الخواص الضوئية للوسط اللاخطي الذي تكون فيه اللاخطية ذات الرتب العالية ، عدا الرتبة الثانية ، مهملة . او

$$\mathcal{P}_{NL} = 2d\mathcal{E}^2.$$

..... (10.2-1)

لنعتبر ان المجال الكهربائي يتألف من مكونة توافقية واحدة او اكثر من ذلك ونحدد مكونات  $\mathcal{P}_{NL}$  الطيفية . وفقا لتقريب بورن الأول ، فإن مصدر الإشعاع  $\mathcal{S}$  يحوي على نفس المكونات الطيفية في كل من  $\mathcal{P}_{NL}$  . وعليه ، فإن المجال المنبعث (المتشتت) يحذو حذو ذلك .

#### A. الجيل التوافقي الثاني (SHG) والتقويم

#### Second – Harmonic Generation and Rectification

لنعتبر استجابة وسط لاخطي لمجال كهربائي توافقي تردده  $\omega$  ، وطول موجته  $(\lambda = 2\pi c_0/\omega)$  ، وسعته المركبة  $E(\omega)$  . رياضيا ، يمكن التعبير عن هذا المجال بالعلاقة التالية:

$$\mathcal{E}(t) = \text{Re}\{E(\omega) \exp(j\omega t)\} = \frac{1}{2}[E(\omega) \exp(j\omega t) + E^*(\omega) \exp(-j\omega t)].$$

.....(10.2-2)

باستخدام معادلتني (10.2-1), (10.2-2)، نحصل على كثافة الأستقطاب اللاخطية المقابلة كالتالي:

$$\mathcal{P}_{NL}(t) = P_{NL}(0) + \text{Re}\{P_{NL}(2\omega) \exp(j2\omega t)\}$$

.....(10.2-4)

حيث

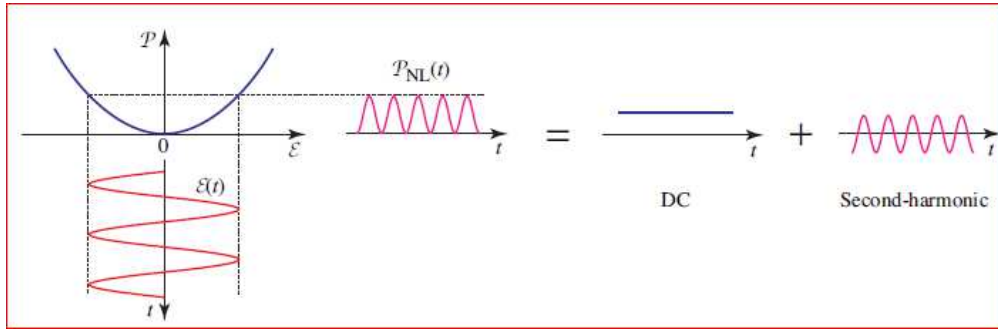
$$P_{NL}(0) = d E(\omega)E^*(\omega)$$

.....(10.2-4)

$$P_{NL}(2\omega) = d E^2(\omega).$$

.....(10.2-5)

بيانيا ، يمكن تمثيل هذه العملية كما في الشكل (10.3)



شكل (10.3) مخطط توليد الجيل التوافقي الثاني في الوسط اللاخطي .

#### ▪ الجيل التوافقي الثاني (SHG) :

مما سبق ، نجد ان المصدر  $\mathcal{S}(t) = -\mu_0 \partial^2 \mathcal{P}_{NL} / \partial t^2$  المقابل للمعادلة (10.2-3) يكون له مركبة عند التردد  $2\omega$  وبسعة مركبة قدرها  $S(2\omega) = 4\mu_0 \omega^2 d E(\omega)E(\omega)$  ويشع مجالا ضوئيا عند التردد  $2\omega$  ( او طول موجة  $\frac{\lambda_0}{2}$  ). لذلك ، يكون لمجال الضوء المنتشيت مركبة عند التوافق الثاني للمجال الضوئي الساقط . حيث ان سعة الضوء المنبعث بالتوافقية الثانية يتناسب مع  $S(2\omega)$  وتكون شدته  $I(2\omega)$  متناسبة بشكل طردي مع  $|S(2\omega)|^2$  ، تتناسب هذه الشدة مع مربع شدة الموجة الساقطة  $I(2\omega) = |E(\omega)|^2 / 2\eta$  ومع مربع المعامل اللاخطي  $d$ .

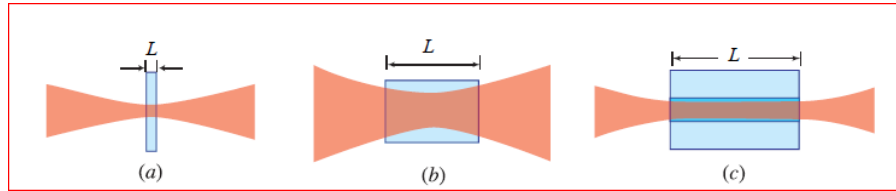
حيث ان الإنبعثات تضاف بشكل تطاوري ، فإن الموجة التوافقية الثانية تتناسب مع مربع طول حيز التفاعل  $L$  .  
وعليه ، تتناسب كفاءة الجيل التوافقي الثاني  $\eta_{SHG} = I(2\omega)/I(\omega)$  مع  $LI^2(\omega)$  . بما ان  $I(\omega) = P/A$  ،  
قدرة الشعاع الساقط و  $A$  مساحة المقطع العرضي لحيز التفاعل ، لذلك تكون كفاءة الجيل التوافقي الثاني  $SHG$  كما يلي

$$\eta_{SHG} = C^2 \frac{L^2}{A} P,$$

..... (10.2.6)

حيث  $C^2$  ثابت ( وحدته  $W^{-1}$  ) وتناسب مع كل من  $d^2$  ،  $\omega^2$  .

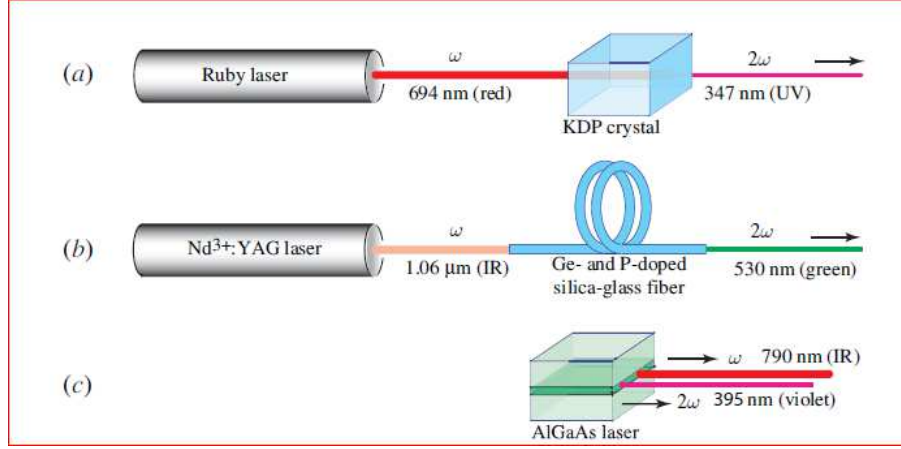
وفقا لمعادلة (10.2-6)، من اجل تعظيم مقدار كفاءة الجيل التوافقي الثاني يلزم ان تملك الموجة الساقطة اكبر قدرة ممكنة  $P$  ونحصل على ذلك بأستخدام الليزر النبضي *pulsed laser* الذي تكون طاقته محصورة بزمن الحصول على ذروة قدرة *peak power* كبيرة . اضافة لذلك ، لتعظيم النسبة  $L^2/A$  يجب تركيز الموجة في اصغر مساحة ممكنة وجعل طول مسار التفاعل  $L$  اكبر ما يمكن . اذا كانت ابعاد البلورة اللاخطية عوامل غير محددة *limiting factors* فإن قيمة  $L$  العظمى المقابلة لقيمة  $A$  المعطاة تكون محددة بحيود الشعاع الضوئي. على سبيل المثال ، في حالة الشعاع الجاوسي المركز بعرض  $w_0$  ، حيث مساحة مقطعه العرضي  $A = \pi w_0^2$  وعلى عمق بؤري  $L = 2z_0 = 2\pi w_0^2/\lambda$  ، تكون النسبة  $L^2/A = 2L/\lambda = 4A/\lambda^2$  . وعليه ، يتمركز هذا الشعاع في اكبر مقاسا للبقعة *spot size* الذي يقابل أكبر عمق بؤري . في هذه الحالة، تكون الكفاءة متناسبة مع  $L$  . يوضح الشكل (10.4) التغير في مقدار  $L$  ومساحة المقطع العرضي  $A$  مع سمك البلورة .



شكل (10.4) حجم التفاعل في (a) بلورة رقيقة . (b) بلورة سميكة. (c) في مرشد الموجة.

تقنيا ، يعرض بناء مرشد الموجة الفائدة العملية لحصر الضوء في مساحة مقطع عرضي صغير وعلى مسافات طويلة ( كما في الشكل (10.4c). بما ان  $A$  تحدد بحجم النمط المنتشر في هذا المرشد ، فإن الكفاءة تتناسب مع  $L^2$  . قد يكون هذه المرشد مستويا **planar** او على شكل الياف بصرية . مع ان في حالة الياف السليكون- زجاج تم استثناء *ruled out* الجيل التوافقي الثاني وذلك بسبب ان هذا الوسط متماثل مركزيا ( $d=0$ ) ، إلا ان هذا الجيل بدأ يلاحظ فعليا في عمل هذه الألياف حديثا. وتنسب هذه الظاهرة الى تفاعلات القطب الرباعي الكهربائي *electric quadrupole* وثنائي القطب المغناطيسي ، والى عيوب في هذه الألياف .

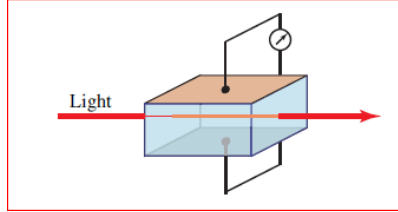
يوضح الشكل (10.5) عدة تكوينات للجيل التوافقي الثاني الضوئي في مواد حجمية **bulk** وفي مرشحات الأمواج التي فيها يتم تحويل الأشعة تحت الحمراء الى شعاع مرئي او يتم تحويل الضوء المرئي الى اشعة فوق بنفسجية .



شكل (10.5) الجيل التوافقي الثاني الضوئي في (a) بلورة حجمية. (b) ليف بصري. (c) فجوة نمط الليزر.

### التقويم البصري *optical Rectification*

تقابل مركبة  $P_{NL}$  في معادلة (10.2-3) حالة الثبات لكثافة الاستقطاب التي تخلق فرق جهد مستمر (ثابت) عبر صفيحتي مكثف موضوعا في وسط لاختطي (الشكل 10.5) ويمثل توليد هذا الجهد المستمر كنتيجة للمجال الضوئي الكثيف مقوماً □ ونياً ( هذه العملية تماثل تحويل الجهد المتردد جيبياً الى جهد مستمر في المقوم الإلكتروني العادي). عملياً ، يمكن تولد فولت بمقدار بضع مئات من  $\mu W$  بفعل نبضة ليزر ذات قدرة تساوي MW.



شكل (10.5) مقوم ضوئي .

### B. الظاهرة الضوئية – الكهربائية *The Electro- Optic Effect*

لنعتبر ان مجالاً كهربياً يتألف من مركبتين: الأولى توافقية بتردد ضوئي  $\omega$  والثانية مركبة ثابتة steady ( $\omega = 0$ ) ، اي

$$\mathcal{E}(t) = E(0) + \text{Re}\{E(\omega) \exp(j\omega t)\}.$$

.....(10.2-7)

بتعويض هذه المعادلة في معادلة (10.2-1) ، نحصل على

$$P_{NL}(t) = P_{NL}(0) + \text{Re}\{P_{NL}(\omega) \exp(j\omega t)\} + \text{Re}\{P_{NL}(2\omega) \exp(j2\omega t)\}$$

..... (10.2-8)

حيث

$$P_{NL}(0) = d [2E^2(0) + |E(\omega)|^2]$$

..... (10.2-8a)

$$P_{NL}(\omega) = 4d E(0)E(\omega)$$

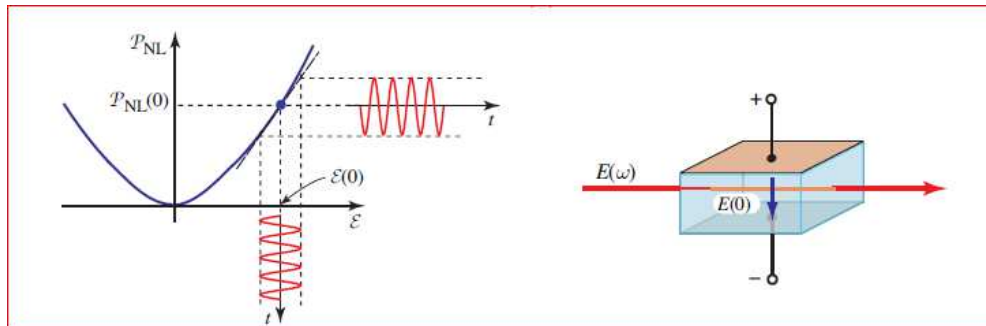
..... (10.2-8b)

$$P_{NL}(2\omega) = d E^2(\omega),$$

.....(10.2-8c)

وعليه ، نلاحظ ان كثافة الإستقطاب تحتوي على الترددات الزاوية التالية :  $0, \omega, 2\omega$  .

اذا كان  $|E(\omega)|^2 \ll |E(0)|^2$  ، فإن مركبة الأستقطاب التوافقي الثاني  $P_{NL}(2\omega)$  تكون مهملة بالنسبة للمركبات  $P_{NL}(0)$  ،  $P_{NL}(\omega)$  . وهذا يكافئ خطية  $\mathcal{P}_{NL}$  كدالة للمجال الكهربائي  $\mathcal{E}$  ، اي تكون العلاقة على شكل خط مستقيم تقريبا بميل مساو للمشتقة عند  $\mathcal{E} = E(0)$  كما في الشكل ( 10.6 ) .





شكل (10.6) خطية الرتبة الثانية لكثافة الإستقطاب  $\mathcal{P}_{NL} = 2d\mathcal{E}^2$  بوجود مجال كهربائي قوي  $E(0)$  ومجال ضوئي ضعيف  $E(\omega)$ .

نبين معادلة (10.2-9b) العلاقة الخطية بين  $\mathcal{P}_{NL}(\omega)$  و  $E(\omega)$  ، والتي يمكن كتابتها على الصورة  $\mathcal{P}_{NL}(\omega) = \epsilon_0 \Delta \chi E(\omega)$  ، حيث يمثل المقدار  $\Delta \chi = (4d/\epsilon_0)E(0)$  الزيادة في القابلية الكهربائية ويتناسب مع المجال الكهربائي  $E(0)$  . كما نحصل على التغير في معامل الإنكسار بإشتقاق العلاقة  $n^2 = 1 + \chi$  ، لنحصل على التالي

$$\Delta n = \frac{2d}{n\epsilon_0} E(0).$$

.....(10.2-10)

بناء على ما تقدم ، نجد ان الوسط يكون خطيا بشكل فعال مع معامل الإنكسار  $n + \Delta n$  ويكون التحكم في هذه الخطية بواسطة المجال الكهربائي  $E(0)$  . كما تخلق طبيعة الوسط اللاخطية اقترانا بين المجال الكهربائي  $E(0)$  والمجال الضوئي  $E(\omega)$  مما يتسبب في تحكم احدهما بالآخر ، اي ان الوسط اللاخطي يعرض الظاهرة الضوئية - الكهربائية الخطية (ظاهرة بوكلس *Pockels effect*) التي تتميز بالعلاقة  $\Delta n = -\frac{1}{2} n^2 \sigma E(0)$  ، حيث  $\sigma$  يعرف بمعامل بوكلس وتتعين قيمة هذا المعامل بمقارنة هذه العلاقة مع معادلة (10.2-10) وتكون كالتالي

$$\sigma \approx -\frac{4}{\epsilon_0 n^4} d \quad \dots \dots \dots (10.2 - 11)$$

### C. خلط موجة ثلاثي *Three wave Mixing*

لنعتبر الحالة التي يكون فيها المجال الكهربائي  $\mathcal{E}(t)$  مكونا من مركبتين توافقيتين بتردد ضوئي  $\omega_1, \omega_2$  ، اي

$$\mathcal{E}(t) = \text{Re}\{E(\omega_1) \exp(j\omega_1 t) + E(\omega_2) \exp(j\omega_2 t)\}.$$

.....(10.2-12)

عندئذ ، تكون المركبة اللاخطية للإستقطاب تحوي على خمس مكونات ذات الترددات التالية

$$0, 2\omega_1, 2\omega_2, \omega_+ = \omega_1 + \omega_2, \omega_- = \omega_1 - \omega_2$$

وبالسعات التالية

$$P_{NL}(0) = d [ |E(\omega_1)|^2 + |E(\omega_2)|^2 ]$$

..... (10.2-13a)

$$P_{NL}(2\omega_1) = d E(\omega_1)E(\omega_1)$$

.....(10.2-13b)

$$P_{NL}(2\omega_2) = d E(\omega_2)E(\omega_2)$$

.....(10.2-13c)

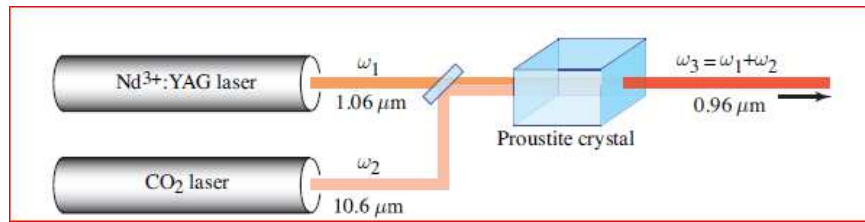
$$P_{NL}(\omega_+) = 2d E(\omega_1)E(\omega_2)$$

.....(10.2-13d)

$$P_{NL}(\omega_-) = 2d E(\omega_1)E^*(\omega_2).$$

.....(10.2-13e)

وعليه ، يمكن استخدام الوسط اللاخطي من الرتبة الثانية لخلط موجتين ضوئيتين ذات ترددات مختلفة وتوليد موجة ثالثة بتردد الفرق او تردد المجموع . وتسمى هذه العملية ( عند اعتبار الفرق) **بالتحويل الخافض للتردد-frequency down-conversion** ، او بالتحويل الرافع ( عند اعتبار الجمع) للتردد **frequency up-conversion** ، على الترتيب. يوضح الشكل (10.6) عملية التحويل الرافع للتردد ، حيث يتم ادخال شعاعين من الليزر ذات اطوال موجية ( في الفراغ)  $\lambda_{01} = 10.6\mu\text{m}$  ،  $\lambda_{02} = 1.06\mu\text{m}$  الى بلورة البروستايت *proustite* وتوليد موجة ثالثة بطول موجي  $\lambda_{03} = 0.96\mu\text{m}$  ( حيث  $\lambda_{03}^{-1} = \lambda_{01}^{-1} + \lambda_{02}^{-1}$  ).



شكل (10.6) توليد تردد الجمع (SFG) كمثال على التحويل الرافع في البلورة اللاخطية .

بالرغم من ان هذا الزوج من الأمواج الساقطة بالترددات المذكورة يولد كثافات استقطابية بالترددات الخمسة السالفة الذكر ، غير ان ليس من الضروري ان تتولد كل هذه الأمواج ، وذلك بسبب ان شروطا اضافية معينة (مطابقة الطور *phase matching*) يجب ان تتحقق .

#### ▪ **مطابقة الطور والتردد Frequency and Phase Matching**

اذا كانت الموجتان (1 ، 2) موجات مستوية بمتجهات موجية  $k_1, k_2$  ، بحيث :

اللاخطي كما يلي :  $P_{NL}(\omega_3) = 2dE(\omega_1)E(\omega_2) = 2dA_1A_2e^{-jk_3.r}$  ، فإن وفقا لمعادلة (10.2-13d) ، يكون الإستقطاب  $E(\omega_1) = A_1 e^{-jk_1.r}$  ،  $E(\omega_2) = A_2 e^{-jk_2.r}$  ،

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$$

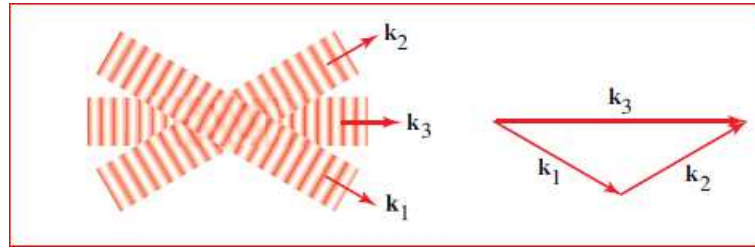
.....(10.2-14)

وتعرف هذه المعادلة بشرط مطابقة التردد *Frequency Matching condition* . ايضا ، يكون

$$k_1 + k_2 = k_3.$$

.....(10.2-15)

وتعرف هذه بمعادلة شرط مطابقة الطور *Phase Matching* . ولهذا يتصرف الوسط كمصدر ضوئي بتردد  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  وسعة مركبة متناسبة مع  $e^{-jk_3.r}$  ويشع موجة بمتجه موجي يعطى بالعلاقة  $k_3 = k_1 + k_2$  ، كما هو موضح في الشكل (10.7) .

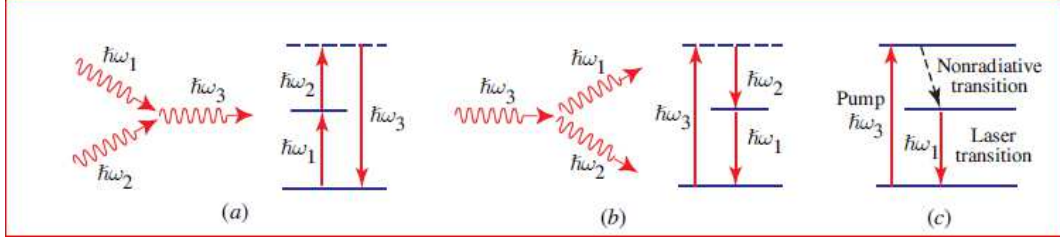


شكل (10.7) شرط مطابقة الطور .

يمكن اعتبار معادلة (10.2-15) ممثلة لشرط مطابقة الطور بين مقدمات الموجات الثلاثة ويمثل شرط مطابقة التردد  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  . حيث ان دليل دالة الموجة المركبة هو  $wt - k \cdot r$  يتضمن هذين الشرطين (مطابقة الطور المكاني والديويوي *spatial and temporal*) لهذه الموجات الثلاثة ويكون ذلك ضروريا لإستدامة التفاعل المتبادل خلال الفترة الممتدة ومناطق الفضاء .

#### ▪ خلط الموجة كعملية تفاعل فوتوني *Wave Mixing as Photon Interaction Process*

يمكن النظر الى عملية خلط الموجة الثلاثي باعتبارها عملية تفاعل بين ثلاثة فوتونات بحيث يتلاشى فيها فوتونان منخفضان في التردد  $\omega_1, \omega_2$  لينتج فوتون ثالث بتردد اعلى  $\omega_3$  (كما في الشكل 10.8a) ، او عكس ذلك ، حيث يتلاشى فوتون عالي التردد  $\omega_3$  لينتج فوتونان بترددات اقل من الترددات  $\omega_1, \omega_2$  (كما في الشكل 10.8b) .



شكل (10.8) مقارنة بين العمليات الباراميتريّة في الوسط اللاخطي من الرتبة الثانية بفعل الليزر.

إذا كان  $\hbar\omega$  ،  $\hbar k$  هما زخم وطاقة الفوتون فإن قانون حفظ الطاقة والزخم في هذه العملية يتطلب التالي

$$\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 = \hbar\omega_3$$

.....(10.2-16)

$$\hbar k_1 + \hbar k_2 = \hbar k_3,$$

.....(10.2-17)

وهذان الشرطان ( 10.2-16,10.2-17 ) يقابلان شرطي مطابقة التردد والطور (10.2-14,10.2-15) .

وبعبارة أخرى ، بالرغم من ان مخطط الطاقة لعملية خلط الفوتون الثلاثي ( الشكل 10.8b ) يحمل بعض اوجه التشابه مع عملية الضخ الضوئي في انتاج ليزر المستويات الثلاثة ( الشكل 10.8c ) ، الا انه يوجد اختلافات مهمة بين العمليتين وهي كالتالي

(1) يكون احد الفترات الثلاثة في عملية الليزر غير مشعا .

(2) يحدث تبادلا للطاقة بين المجال والوسط في عملية الليزر .

(3) تكون مستويات الطاقة المصاحبة مع عملية الليزر حادة نسبيا وتنشأ من ذرات او جزيئات النظام ، بينما تكون مستويات الطاقة في عملية الخلط هذه مفروضة إجباريا بطاقة الفوتون وبشروط مطابقة الطور وتكون متناغمة *tunable* خلال مدى واسع من المناطق الطيفية .

وبناء على ما سبق ، يمكن القول ان في عملية خلط الموجة يحدث تحويلا للطاقة بين الموجات المتفاعلة وتكون الطاقة محفوظة بفعل شرط مطابقة التردد  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$  . كذلك ، يكون عدد الفوتونات محفوظة في هذا التفاعل الفوتوني .

لنعتبر عملية الأنفصال الفوتوني الممثل في الشكل (10.8b) . اذا كانت الكميات التالية :  $\Delta\phi_1, \Delta\phi_2, \Delta\phi_3$  تمثل صافي التعبير في الفيض الفوتوني في التفاعل ( اي فيض الفوتونات المغادرة مطروحا منه فيض الفوتونات الداخلة ) وبترددات  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  . وعليه ، يكون  $\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 = -\Delta\phi_3$  وهذا يعني ان لكل واحد من الفوتونات المفقودة من  $\omega_3$  ، نكسب فوتون واحد بتردد  $\omega_1$  وآخر بتردد  $\omega_2$  .

إذا كانت الموجات الثلاثة متنقلة في نفس الإتجاه ، محور  $z$  وعلى فرض ان حجم التفاعل ينحصر في اسطوانة مساحة مقطوعها الوحدة و بطول متناهي في الصغر (  $\Delta z \rightarrow 0$  ) ، فإنه يمكن الإستنتاج ان كثافات فيض فوتونات الموجات الثلاثة :  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  يجب ان تحقق ما يلي

$$\frac{d\phi_1}{dz} = \frac{d\phi_2}{dz} = -\frac{d\phi_3}{dz}.$$

.....(10.2-18)

وتعرف هذه المعادلة بقانون **حفظ عدد الفوتونات photon- number conservation** .

لنفرض ان الشدات الضوئية لهذه الموجات :  $(W/m^2)$  هي  $I_1 = \hbar\omega_1\phi_1$  ,  $I_2 = \hbar\omega_2\phi_2$  ,  $I_3 = \hbar\omega_3\phi_3$  .  
 لذلك ، تؤول معادلة (10.2-18) الى التالي

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{I_1}{\omega_1} \right) = \frac{d}{dz} \left( \frac{I_2}{\omega_2} \right) = -\frac{d}{dz} \left( \frac{I_3}{\omega_3} \right)$$

.....(10.2-19)

وتعرف هذه المعادلة بعلاقة **مانلي-روي Manley- Rowe** .

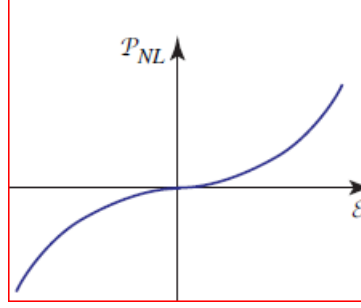
### ( 10.4 ) البصريات اللاخطية من الرتبة الثالثة *Third Order Nonlinear Optics*

كما سبق ذكره ، يندم حد الرتبة الثانية في العلاقة اللاخطية التي تربط بين كثافة الإستقطاب والمجال الكهربائي المسلط في حالة الوسط ( $d=0$ ) المتماثل مركزيا وذلك لأن اتجاه الإستقطاب يجب ان ينعكس تماما عند عكس اتجاه المجال الكهربائي المسلط. وعليه ، يكون الحد السائد في مفكوك تايلور لكثافة الإستقطاب هو **الحد الثالث** ، اي

$$\mathcal{P}_{NL} = 4\chi^{(3)}\mathcal{E}^3$$

.....(10.3-1)

يوضح الشكل (10.9) الصورة البيانية لمعادلة (10.3-1) في الأوساط المتماثلة مركزيا .



شكل (10.9) اللاخطية للرتبة الثالثة .

وتعرف هذه المادة بوسط كيرر *Kerr medium* . عمليا ، تستجيب اوساط كبير للمجال الضوئي المسلط بتوليد توافقات ثلاثية *third harmonics* و بترددات المجموع والفرق الثلاثي .

(A) الجيل الهرموني الثالث وتعديل الطور الذاتي

### *Third Harmonic Generation and self-Phase modulation*

▪ الجيل الهرموني الثالث

وفقا لمعادلة (10.3-1) ، تكون استجابة الوسط اللاخطي ذو الرتبة الثالثة للمجال الضوئي احادي اللون ،  $\mathcal{E}(t) = \text{Re} \{E(\omega)\exp(j\omega t)\}$  ، على شكل استقطاب لا خطي  $P_{NL}(t)$  الذي يحتوي على مركبات ترددية : احدهما بتردد  $\omega$  والأخرى بتردد  $3\omega$  وتعطى هذه المركبات كما يلي

$$P_{NL}(\omega) = 3\chi^{(3)}|E(\omega)|^2E(\omega)$$

..... (10.3-2a)

$$P_{NL}(3\omega) = \chi^{(3)}E^3(\omega).$$

.....(10.3-2b)

ويدل وجود مركبة الإستقطاب عند التردد  $3\omega$  على توليد الضوء الهرموني الثالث . مهما يكن ، تكون كفاءة الطاقة المتحولة منخفضة جدا .

▪ ظاهرة كيرر الضوئية *Optical Kerr Effect*

تقابل مركبة الإستقطاب عند التردد  $\omega$  والمعطاة في معادلة (10.3-2a) تغيرا متناهما في القابلية الكهربائية  $\Delta\chi$  عند هذا التردد وتكون كما يلي

$$\epsilon_o \Delta\chi = \frac{P_{NL}(\omega)}{E(\omega)} = 3\chi^{(3)}|E(\omega)|^2 = 6\chi^{(3)}\eta I,$$

حيث  $I = |E(\omega)|^2/2\eta$  تمثل الشدة الضوئية للموجة الابتدائية . بما ان  $n^2 = 1 + \chi$  فإن  $\Delta n = (\partial n/\partial\chi) \Delta\chi = \Delta\chi/2n$  ، وعليه ،

$$\Delta n = \frac{3\eta}{\epsilon_o n} \chi^{(3)} I \equiv n_2 I,$$

.....(10.3-4)

اي ان التغير في معامل انكسار هذا الوسط يتناسب طرديا مع الشدة الضوئية ، من هنا نستنتج ان معامل الإنكسار يكون دالة خطية للشدة الضوئية ، او

$$n(I) = n + n_2 I.$$

.....(10.3.5)

حيث

$$n_2 = \frac{3\eta_o}{n^2 \epsilon_o} \chi^{(3)}.$$

.....(10.3.6)

تعرف هذه الظاهرة بظاهرة كيرر الضوئية ، ويعود سبب التسمية الى وجود التشابه بين هذه الظاهرة مع ظاهرة كيرر البصرية- الكهربائية ( حيث يكون التغير في معامل انكسار الوسط متناسبا مع مربع المجال الكهربائي الثابت او المستمر ) . وتعتبر ظاهرة كيرر الضوئية ظاهرة مستحثة ذاتية *self-induced effect* و تكون السرعة الطورية الموجية معتمدة على شدة نفس الموجة .

ينحصر مقدار المعامل  $n_2$  ( بوحدة  $cm^2/w$  ) ضمن المدى  $[10^{-16} - 10^{-14}]$  لمادة الزجاج ، بينما تتراوح قيمته في المواد العضوية ضمن المدى  $[10^{-10} - 10^{-8}]$  وفي اشباه الموصلات نجد ان هذه القيمة تقع ضمن المدى  $[10^{-10} - 10^{-2}]$  ، كما تكون هذه القيمة حساسة لطول الموجة العاملة .

### ▪ تعديل الطور الذاتي *Self-Phase Modulation*

نتيجة لظاهرة كيرر الضوئية ، تخضع الموجة الضوئية المتحركة في الوسط اللاخطي ثلاثي الرتبة لما يعرف بتعديل الطور الذاتي ، يكون انزياح الطور المتحمل بواسطة شعاع ضوئي قدرته  $P$  ، ومساحة مقطعه  $A$  ، وبطول مسار  $L$  في الوسط كما يلي

$$\varphi = 2\pi(I)L/\lambda_0 = 2\pi(n + n_2P/A)L/\lambda_0$$

هذا يعني ان التغير في هذا الطور يكون كالتالي:

$$\Delta\varphi = -2\pi n_2 \frac{L}{\lambda_0 A} P,$$

.....(10.3-7)

كما يلاحظ ان هذا التغير يتناسب مع قدرلة الشعاع الضوئي و يكون التعديل الطوري الذاتي مفيدا في التطبيقات التي يتحكم فيها الضوء بالضوء . ولتعظيم هذه الظاهرة ، يجب ان تكون قيمة  $L$  كبيرة وقيمة  $A$  صغيرة ويمكن توفير هذه المتطلبات عليها بواسطة استعمال مرشحات الموجة *waveguides* . من المعادلة (10.3-8) ، نجد ان القدرة الضوئية التي نحصل عليها عند  $\Delta\varphi = \pi$  تكون مساوية للمقدار  $P_\pi = \lambda_0 A / 2Ln_2$  . فمثلا ، عند اعتبار الياف البصري المطعم بالزجاج *doped-glass fiber* الذي تكون معاملاته السابقة كما يلي:

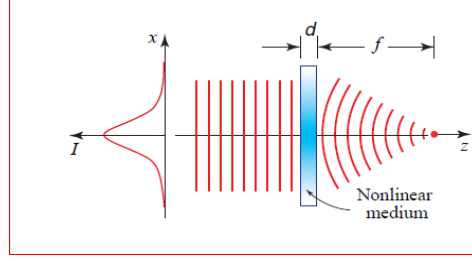
ضوئية  $P_\pi = 0.5W$  . عمليا ، يمكن استعمال المواد ذات قيم  $n_2$  الكبيرة في تصنيع قنوات مرشحات موجية بطول السنتمتر للحصول على انزياح طوري بمقدار  $\pi$  عند قدرات تعادل بضع  $mW$  .

عمليا ، يمكن تحويل التعديل الطوري الى تعديل في الشدة الضوئية باستخدام عدة تقنيات مثل *مطياف ماخ- زيندر Mach-Zehnder interferometer* .

### ▪ التركيز الذاتي *Self - Focusing*

تترافق عملية التركيز الذاتي مع تعديل الطور الذاتي السابق الذكر وتتلخص هذه العملية كالتالي: عند مرور شعاع ضوئي كثيف ( عالي الشدة ) خلال صفيحة رقيقة مكونة من مادة لاخطية تظهر فيها ظاهرة كيرر الضوئية ( كما في الشكل 10.10) ، فإن معامل الإنكسار يغير خارطة نموذج الشدة في المستوى المستعرض . اي، اذا كان لهذا الشعاع شدة عظيمة عند المركز ، يكون التغير الأعظم لمعامل الإنكسار عند المركز ايضا . هذا يعني ان هذه الصفيحة تتصرف كوسط متحدر في معامل انكساره (*graded - index*) مما يجعل انزياح الطور للموجة المنتشرة فيه غير منتظم *non-uniform* وينتج عن ذلك انحناء مقدمة الموجة . هذا يعني ان تحت شروط معينة ، يتصرف هذا الوسط كعدسة ذات بعد بؤري يعتمد على قدرة الشعاع (I) .





شكل (10.10) مخطط عمل وسط لاخطي من الرتبة الثالثة كعدسة لامة .

### التفريعات المكانية *Spatial Solitons*

عند مرور شعاع ضوئي كثيف خلال سمك معتبر من وسط متجانس لاخطي فإن معامل إنكسار هذا الوسط يتغير بشكل غير منتظم بحيث يعمل هذا الوسط كمرشد موجي متحدر المعامل *graded-index*. وهكذا يخلق الشعاع مرشدا موجيا خاصا به. فإذا كانت شدة هذا الشعاع لها نفس التوزيع المكاني في المستوى المستعرض لأحد انماط هذا المرشد التي يخلقها هذا الشعاع بنفسه ، فإن هذا الشعاع ينتشر بثبات ذاتي بدون اي تغيير في توزيعه المكاني . تحت هذه الشروط ، يكون الحيوود معوضا بالظاهرة اللاخطية . تسمى هذه الأشعة المرشدة ذاتيا **بالتفريعات المكانية** .

رياضيا ، يمكن وصف الإرشاد الضوئي الذاتي باستخدام معادلة **هلمهولتز Helmholtz** :

$$[\nabla^2 + n^2(I)k_0^2] E = 0,$$

حيث

$$n(I) = n + n_2 I , \quad k_0 = \omega/c_0 , \quad I = |E|^2/2\eta$$

رياضيا ، يمكن تبسيط هذه المعادلة التفاضلية غير الخطية بفرض ان  $E = A \exp(-jkz)$  ، حيث  $k = nk_0$  ، وان معادلة الغلاف  $A = A(x, z)$  يتغير بطيئا في إتجاه محور  $z$  ( مقارنة بطول الموجة  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  ) ولا يتغير في إتجاه محور  $y$ . بإستخدام التقريب التالي:

$$(\partial^2/\partial z^2)[A \exp(-jkz)] = (-2jk \partial A/\partial z - k^2 A) \exp(-jkz) ,$$

تؤول معادلة هلمهولتز الى الصورة التالية

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2jk \frac{\partial A}{\partial z} + k_0^2 [n^2(I) - n^2] A = 0.$$

.....(10.3-8)

إذا كان  $n_2 I \ll n$  ، يمكن اعتبار ما يلي

$$[n^2(I) - n^2] = [n(I) - n][n(I) + n] \approx [n_2 I][2n] = \frac{2n_2 n |A|^2}{2\eta} = \frac{n^2 n_2}{\eta_0} |A|^2,$$

وتؤول معادلة (10.3-8) الى التالي

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{n_2}{\eta_0} k^2 |A|^2 A = 2jk \frac{\partial A}{\partial z}.$$

..... (10.3-9)

تمثل هذه المعادلة احدى صور معادلة شرودنجر اللاخطية ويكون احد حلولها المكاني كما يلي

$$A(x, z) = A_0 \operatorname{sech} \left( \frac{x}{W_0} \right) \exp \left( -j \frac{z}{4z_0} \right).$$

.....(10.3-10)

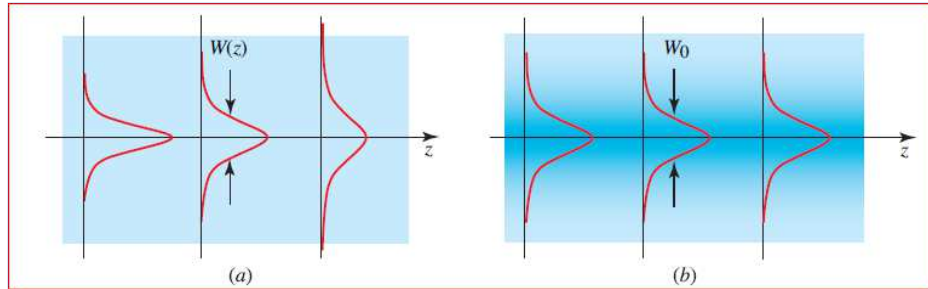
حيث  $W_0$  ثابت ،  $A_0$  تحقق صحة العلاقة :  $n_2 (A_0^2 / 2\eta_0) = 1/k^2 W_0^2$  ، ايضا ،

$z_0 = \frac{1}{2} k W_0^2 = \pi W_0^2 / \lambda$  . يكون توزيع الشدة كما يلي

$$I(x, z) = \frac{|A(x, z)|^2}{2\eta} = \frac{A_0^2}{2\eta} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{x}{W_0} \right)$$

.....(10.3-11)

ويكون هذا التوزيع غير معتمدا على المتغير  $z$  وبعرض  $W_0$  ( الشكل 10.11 ) .



شكل (10.11) مقارنة بين (a) شعاع جاوس المنتشر في وسط خطي (b) شعاع ضوئي مرشد ذاتيا في وسط لاخطي.

يمثل التوزيع المعطى في معادلة (10.3-11) النمط في المرشد الموجي متحدر المعامل وذو معامل انكسار مقداره يساوي  $n + n_2 I = n [1 + (1/k^2 W_0^2) \operatorname{sech}^2 (x/W_0)]$  ، وهذا يضمن الثبات الذاتي . بما ان

،  $E = A \exp(-jkz)$  ، لذلك تنتشر الموجة بثابت انتشار يساوي  $k + 1/z_0 = k(1 + \lambda^2/8\pi^2 W_0^2)$  ، وبسرعة طور تساوي  $c/(1 + \lambda^2/8\pi^2 W_0^2)$  . من هنا نلاحظ ان سرعة الموجة تكون اصغر من  $c$  للأشعة الموضعية *localized beams* (في حالة قيم  $W_0$  الصغيرة) ولكن تقترب من  $c$  في حالة القيم الكبيرة .

### ▪ كسب رامان *Raman Gain*

عموماً ، يكون المعامل اللاخطي  $\chi^{(3)}$  عدداً مركباً ، اي  $\chi^{(3)} = \chi_R^{(3)} + j\chi_I^{(3)}$  . وعليه ، يكون التعديل الذاتي للطور المعطى في معادلة (10.3-7) ، او

$$\Delta\varphi = 2\pi n_2 \frac{L}{\lambda_0 A} P = \frac{6\pi\eta_0 \chi^{(3)} L}{\epsilon_0 n^2 \lambda_0 A} P,$$

عدداً مركباً ، بحيث يكون عامل الطور الإنتشاري  $\exp(-j\varphi)$  عبارة عن ترابط ما بين انزياح الطور  $\Delta\varphi$  والكسب  $\exp(\gamma L/2)$  . حيث يعطى معامل الكسب بالعلاقة التالية

$$\gamma_R = \frac{12\pi\eta_0 \chi_I^{(3)}}{\epsilon_0 n^2} \frac{1}{\lambda_0 A} P,$$

.....(10.3-12)

وتعرف هذه المعادلة بمعامل كسب رامان وتتناسب قيمة هذا المعامل مع القدرة الضوئية  $P$  . كما يعزى منشأ هذه الظاهرة الى اقتران الضوء مع انماط الوسط الإهتزازية العالية التردد التي تتصرف كمصدر للطاقة المزودة للكسب . عملية ، في الأوساط المنخفضة الفقد *low - loss* يزيد كسب رامان عن الفقد عند مستويات قدرة معقولة وعندها يتصرف الوسط كمضخم  $\square$  وني *optical amplifier* . كما تتجلى هذه الظاهرة في عمل الألياف البصرية المنخفضة الفقد والمعروفة بإسم ليزرات رامان الليافية *Fiber Raman Lasers* .

### (B) خلط الموجة الرباعي *Four- Wave Mixing*

في البند السابق ، تمت مناقشة استجابة الوسط اللاخطي ثلاثي الرتبة لموجة احادية اللون *monochromatic wave* . في هذا البند ، سنتناول دراسة عملية الخلط بين اربع موجات .

بشكل عام ، تكون عملية خلط الموجة الثلاثي غير ممكنة في حالة الأوساط اللاخطية ذات الرتبة الثالثة لأن ليس بالإمكان عمل اقتران بين ثلاثة موجات مختلفة التردد  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  بدون مساعدة موجة رابعة . مثلاً ، لا يوجد مساهمة لمركبة  $P_{NL}(\omega_1)$  من الموجتين 2،3 ، عدا في الحالات المنحلة *degenerate*  $(\omega_1 = 2\omega_3 - \omega_2)$  .

لاختبار حالة خلط الموجة الرباعي في الوسط اللاخطي ثلاثي الرتبة ، نبدأ بتحديد استجابة هذا الوسط بتركيب ثلاث موجات تردداتها  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  مع المجال الكهربائي التالي

$$\mathcal{E}(t) = \text{Re}\{E(\omega_1) \exp(j\omega_1 t)\} + \text{Re}\{E(\omega_2) \exp(j\omega_2 t)\} + \text{Re}\{E(\omega_3) \exp(j\omega_3 t)\}.$$

من السهل ان نعبر عن هذا المجال بصورة جمع ستة حدود كما يلي

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{q=\pm 1, \pm 2, \pm 3} \frac{1}{2} E(\omega_q) \exp(j\omega_q t),$$

.....(10.3-13)

حيث  $\omega_{-q} = -\omega_q$  ,  $E(-\omega_q) = E^*(\omega_q)$  بتعويض معادلة (10.3-13) في معادلة (10.3-1) ، يمكن التعبير عن  $\mathcal{P}_{NL}$  بصورة مجموع مكونا من  $6^3 = 216$  حدا ، او

$$\mathcal{P}_{NL}(t) = \frac{1}{8} \chi^{(3)} \sum_{q,r,l=\pm 1, \pm 2, \pm 3} E(\omega_q) E(\omega_r) E(\omega_l) \exp[j(\omega_q + \omega_r + \omega_l)t].$$

.....(10.3-14)

وبهذا تكون مجموع المركبات التوافقية بالترددات التالية:

$$\omega_1, \dots, 3\omega_1, \pm\omega_2, \dots, \pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3$$

كما تحدد السعة  $\mathcal{P}_{NL}$  للمركبة ذات التردد  $\omega_q + \omega_r + \omega_l$  بإضافة التبديلات المناسبة بين  $q, r, l$  . فمثلا ،

$$\mathcal{P}_{NL}(\omega_3 + \omega_4 - \omega_1) \text{ تحتوي على ست تبديلات ، اي}$$

$$\mathcal{P}_{NL}(\omega_3 + \omega_4 - \omega_1) = 6\chi^{(3)} E(\omega_3) E(\omega_4) E^*(\omega_1).$$

.....(10.3-15)

تشير هذه المعادلة الى ان الموجات الأربعة قد تمزج بواسطة هذا الوسط اذا كان  $\omega_2 = \omega_3 + \omega_4 - \omega_1$  ، او

$$\omega_3 + \omega_4 = \omega_1 + \omega_2.$$

.....(10.3-16)

تمثل هذه المعادلة ما يعرف بشرط مطابقة التردد لخلط الموجة الرباعي . لنفرض ان الأمواج 1, 3, 4 هي موجات مستوية ذات متجهات موجية  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$  ، بحيث ان

$$E(\omega_q) \propto \exp(-j\mathbf{k}_q \cdot \mathbf{r}) , \quad q = 1, 3, 4$$

$$\mathcal{P}_{NL}(\omega_2) \propto \exp(-j\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}) \exp(-j\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{r}) \exp(j\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}) = \exp[-j(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}],$$

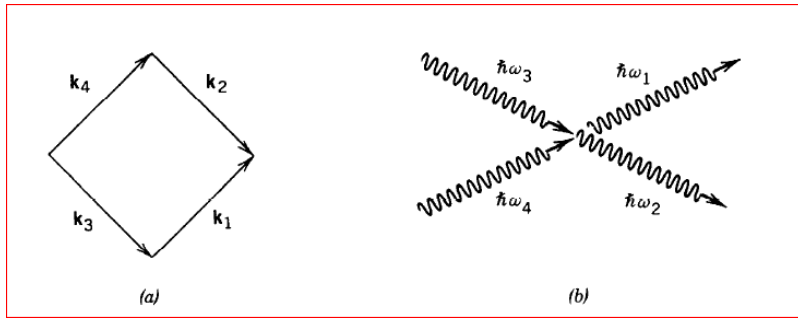
وهذا يدل على ان الموجة 2 تكون موجة مستوية ايضا ، وذات متجه موجي يساوي  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1$  ، ومن ذلك نجد ان

$$\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2.$$

.....(10.3-17)

وتعرف هذه المعادلة بشرط مطابقة الطور لخلط الموجة الرباعي .

كما يمكن تفسير عملية الخلط الرباعي للأمواج باعتبارها عملية تفاعلية بين اربع فوتونات ،اذ يتحد الفوتون ذو التردد  $\omega_3$  مع الفوتون  $\omega_4$  لإنتاج فوتونين  $\omega_1$  و  $\omega_2$  ( كما في الشكل 10.12) . كما تمثل المعادلات (16- 10.3) ، (17- 10.3) قانوني حفظ الطاقة وحفظ الزخم ، على الترتيب .



شكل (10.12) خلط الموجة الرباعي (a) شرط مطابقة الطور (b) تفاعل اربع فوتونات .

### (C) ترافق الطور الضوئي *Optical Phase Conjugation*

يتحقق شرط مطابقة التردد (معادلة 10.3-16) عندما تكون الموجات الأربعة متساوية التردد ، اي

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega.$$

.....(10.3-18)

عندئذ ، تسمى عملية خلط الأمواج هذه بخلط الموجة الرباعي المتحلل *degenerate four- wave mixing* . لنفرض ان اثنتين من هذه الموجات ( موجة 3 و4) هي موجات مستوية منتظمة وتتحرك في اتجاهين متعاكسين ، حيث تكون المجالات الكهربائية كما يلي

$$E_3(\mathbf{r}) = A_3 \exp(-j\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}), \quad E_4(\mathbf{r}) = A_4 \exp(-j\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{r}),$$

..... (10.3-19)

باعتبار

$$\mathbf{k}_4 = -\mathbf{k}_3 \quad \text{.....} \quad (10.3-20)$$

بتعويض المعادلات (10.3-19, 10.3-20) في معادلة (10.3-15) ، نجد ان كثافة الإستقطاب للموجة 2 تساوي  $6\chi^{(3)}A_3A_4E_1^*(r)$  ، ويمثل هذا الحد مصدرا باعثا لموجة ضوئية (موجة 2) بسعة مركبة هي

$$E_2(\mathbf{r}) \propto A_3A_4E_1^*(\mathbf{r}).$$

.....(10.3-21)

تعرف هذه المعادلة بموافقة الطور، حيث  $A_3, A_4$  ثابت ، وتكون الموجة 2 متناسبة مع المقلوب المرافق للموجة 1 . في هذه الحالة ، يخدم الجهاز كمرفق للطور *phase conjugator* . كما تسمى الموجتان 3 و 4 موجات المضخة *pump waves* ، بينما تسمى الموجتان 1 و 2 بموجة المجس *probe* ، وموجة المرافق *conjugate* ، على الترتيب ، وكما سيظهر لاحقا ، تكون الموجة المرافقة مماثلة لموجة المجس فيما عدا انها تتحرك في الإتجاه المعاكس. كما يكون مرافق الطور مرآة خاصة تعكس الموجة على نفسها الى الخلف بدون اي تعديل على مقدماتها .

لفهم عملية الترافق الطوري ، نقدم المثالين التاليين :

### مثال (10.1)

وضح عمل مرافق الموجة المستوية ؟

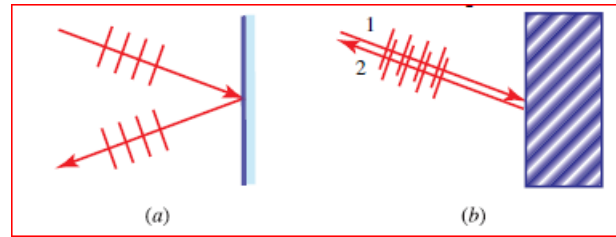
الحل

اذا كانت الموجة 1 هي موجة مستوية منتظمة ذات سعة  $E_1(\mathbf{r}) = A_1 \exp(-jk_1 \cdot \mathbf{r})$  ، تتحرك في الاتجاه  $k_1$  . باستخدام معادلة (10.3-21) ، نجد ان سعة الموجة 2 تكون كما يلي :

$$E_2(\mathbf{r}) = A_1^* \exp(-jk_2 \cdot \mathbf{r})$$
 ، وهذا يمثل موجة مستوية منتظمة متحركة في الإتجاه المعاكس  $k_2 = -k_1$

كما في الشكل (10.13) . وبذلك يتحقق شرط موافقة الطور (معادلة 10.3-17) ، ويعمل الوسط كمرآة عاكسة

للموجة الساقطة بحيث ترتد على نفسها مهما كانت زاوية السقوط .



شكل (10.13) انعكاس موجة مستوية عن (a) مرآة مستوية عادية . (b) مرآة الطور المرافق.

### مثال (10.2)

وضح عمل مرافق الموجة الكروية ؟

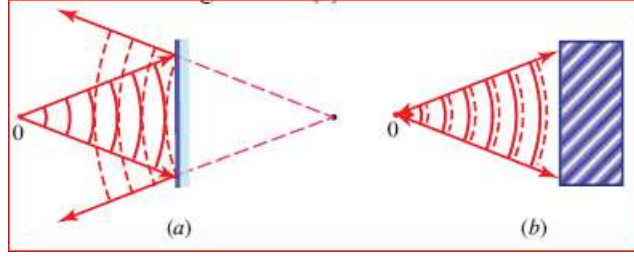
الحل

اذا كانت الموجة 1 هي موجة كروية متمركزة حول نقطة الأصل  $\mathbf{r}=\mathbf{0}$  ، وذات سعة مركبة بالصورة الرياضية :

بإستخدام معادلة (10.3-21) ، تكون الموجة 2 ذات سعة مركبة بالصورة الرياضية التالية :

$$E_2(\mathbf{r}) \propto (1/r)\exp(+jkr)$$

و تمثل هذه العلاقة موجة كروية متحركة نحو الخلف ، وتتقارب نحو المركز ( كما في الشكل 10.14b ).



شكل (10.14) انعكاس موجة كروية عن (a) مرآة مستوية عادية (b) مرآة المرافق الطوري .

بما ان من الممكن اعتبار موجة المجس المطلقة تركيباً من الموجات المستوية التي تكون كل واحدة منها منعكسة على نفسها بواسطة المرافق ، لهذا تكون الموجة المرافقة مماثلة للموجة الساقطة في كل مكان عدا في الإتجاه المعاكس لإتجاه الإنتشار، اي ان الموجة المرافقة تعيد ترسيم *retrace* الموجة الأصلية بإنتشارها في الإتجاه الخلفي *backward* مع المحافظة على نفس مقدمات الموجة .

يعتبر الترافق الطوري محاكاة لإنعكاس الزمن *time reversal* ، ويمكن فهم ذلك من خلال فحص مجال الموجة المرافقة التالي

$$\mathcal{E}_2(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[E_2(r)\exp(j\omega t)] \propto \text{Re}[E_1^*\exp(j\omega t)]$$

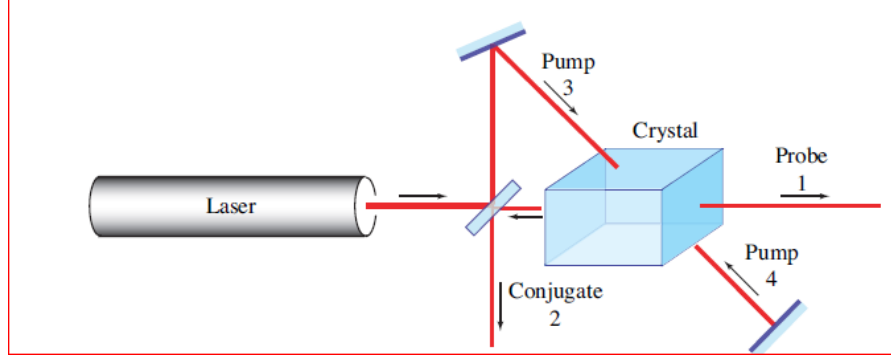
وبما ان الجزء الحقيقي للعدد المركب يساوي الجزء الحقيقي لمرافقه ، لذلك يكون

$$\mathcal{E}_2(\mathbf{r}, t) \propto \text{Re}[E_1(r)\exp(-j\omega t)]$$

وبمقارنة هذا المجال مع مجال موجة المجس التالي

$$\mathcal{E}_1(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[E_1(r)\exp(j\omega t)]$$

نلاحظ ان من الممكن الحصول على احد هذه المجالات من المجال الآخر بواسطة التحويل  $t \rightarrow -t$  ، بمعنى ان الموجة المرافقة تظهر كنسخة معكوسة زمنياً لموجة المجس . كما يمكن ان تحمل الموجة المرافقة قدرة اكبر من تلك التي تحملها موجة المجس ، ويمكن رؤيته ذلك من خلال ملاحظة ان شدة الموجة المرافقة ( موجة 2 ) تتناسب مع حاصل ضرب شدة كل من الموجات المضخة 3, 4 ( معادلة 10.3-21 ) . عند زيادة قدرات الموجات المضخة بحيث تحمل الموجة المرافقة قدرة اكثر من قدرة موجة المجس ، فإن الوسط يعمل كمرآة مضخمة *amplifying mirror* . يوضح الشكل (10.15) ترتيباً لنظام ضوئي يبين عملية ترافق الطور .



شكل (10.15) ترتيب نظام ضوئي لتوضيح مبدأ تراقق الطور بواسطة بلورة لاختية .

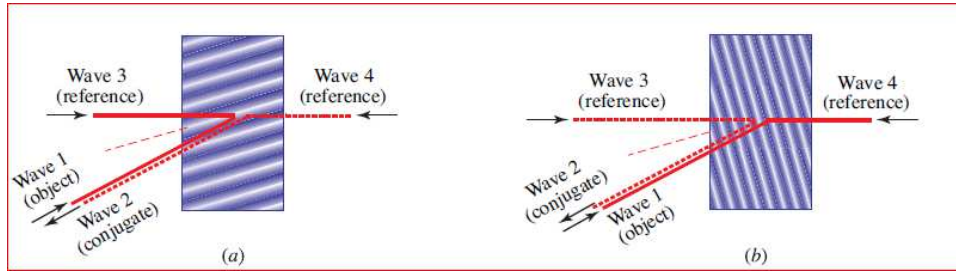
بالرجوع الى هذا الشكل ( 10.15)، يمكن الحصول على الموجات المضخة 3، 4، وموجة المجس بواسطة مقسم شعاع الليزر *beam splitter* والمرآتان، بينما تتولد الموجة المرافقة 2 من البلورة للاختية .

#### ■ خلط الموجة الرباعي المنحل بصورة هلوغرافيا الزمن الحقيقي

### Degenerate Four Wave Mixing As a Form of Real – Time Holography

نظريا ، تكون عملية خلط الموجة الرباعي مماثلة *analogous* لهلوغرافيا الحجم *volume holography* ، وكما سبق شرحه ، تكون الهلوغرافيا عبارة عن عملية مكونة من خطوتين حيث يتم فيهما تكوين نموذج تداخل بواسطة تركيب موجة جسما ما  $E_1$  مع موجة مرجعية  $E_3$  ، ويسجل هذا النموذج على فيلم فوتوغرافي ( حساس ضوئيا) ، وتباعا يكون هناك موجة اخرى مرجعية  $E_4$  تنفذ (او تنعكس) من هذا الفيلم لتخلق موجة الجسم المرافقة التالية  $E_2 \propto E_4 E_3 E_1^*$  ، او نسخة طبق الأصل عن هذه الموجة  $E_2 \propto E_4 E_1 E_3^*$  ، وهذا يعتمد على الترتيبات الهندسية للعملية . وعليه ، يسمح الوسط للاختي بأنية الزمن الحقيقي لعملية التسجيل الهلوغرافية وعملية اعادة بناء *reconstruction* الموجة ، وتحدث هذه العملية في وسط كبير *Kerr* ، وفي وسط الإنكسار الضوئي *photorefractive* .

عند خلط اربع موجات في وسط لاختي يتداخل كل زوج من هذه الموجات ويخلق محزوزة *grating* بحيث تنعكس الموجة الثالثة عن هذه المحزوزة لتنتج الموجة الرابعة . كما يتم تبادل ادوار التداخل موجة الجسم و الموجات الأربعة بحيث يكون هناك نوعان من المحزوزات كما في الشكل (10.16) .



شكل (10.16) خلط الموجة الرباعي في وسط لاختي. (a) محزوز النفاذ. (b) محزوز الإنعكاس.



لنعتبر العملية الأولى المبينة في الشكل (10.16a) ، ولنفرض ان الموجتين المرجعيتين ( موجة 3 و 4 ) هي الموجات المحسوبة ذات الإنتشار المستوي . لذلك ، تكون خطوتا الهلوغرافيا كما يلي :

**الخطوة الأولى :** تضاف موجة الجسم 1 الى الموجة المرجعية 3 ، ويسجل مجموع شدتهما في الوسط على صورة محزوز حجمي ( هلوغرام *hologram* ) .

**الخطوة الثانية :** يعاد بناء الموجة المرجعية 4 بواسطة انعكاس براغ **Bragg** من المحزوز لخلق الموجة المرافقة ( موجة 2 ) .

ويسمى هذا المحزوز **بمحزوز النفاذ *transmission grating*** .

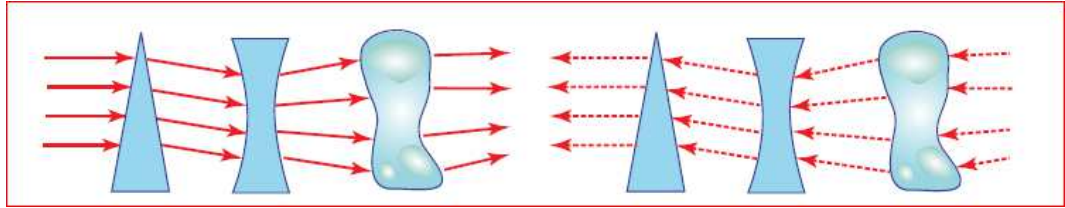
اما الاحتمالية الثانية فتكون كما في الشكل (10.16b) حيث تتداخل الموجة المرجعية 4 مع موجة الجسم 1 ، وهذا يخلق محزوزا يسمى **محزوز الانعكاس** ، ومنه تنعكس الموجة المرجعية 3 لتخلق الموجة المرافقة 2 .

في الملخص ، يعطي الخلط الرباعي للأمواج الوسائل اللازمة لهلوغرافيا الزمن الحقيقي و ترافق الطور ، وتستخدم في العديد من التطبيقات ، مثل معالجة الإشارة ضوئيا *optical signal processing* .

#### ■ استخدام مرافقات الطور في اعادة الموجة

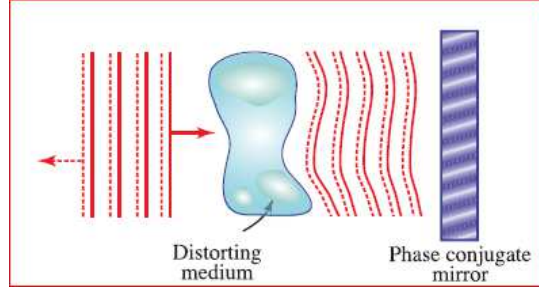
### Use of Phase Conjugators in Wave Restortion

على ضوء امكانية انعكاس الموجة على مسارها ( اعادة ترسيمها في الإتجاه المعاكس لإنتشارها ) ، تم اقتراح عدة تطبيقات مفيدة في تصميم الأنظمة البصرية ، ومن هذه التطبيقات تقنية التخلص من تشوهات ( انحرافات ) مقدمة الموجة عند ترسيمها في الأنظمة البصرية *wavefront aberrations* ، وتعتمد هذه الفكرة على مبدأ العكسية لمسارات الأشعة الضوئية (الشكل 10.17) ، وينص هذا المبدأ على ان الأشعة المتنقلة خلال وسط ضوئي خطي من جهة اليسار نحو جهة اليمين تتبع نفس المسار عند انعكاسها وتنفلها في الإتجاه المعاكس، و يمكن تطبيق هذا المبدأ على الأمواج أيضا .



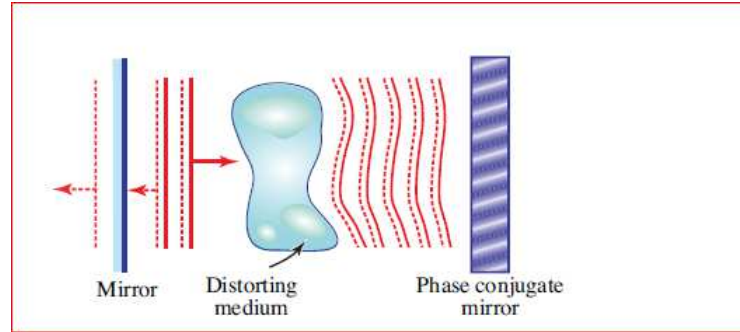
شكل (10.17) مبدأ المعكوسية الضوئي .

اذا حدث تشوها ما لمقدمة الموجة للشعاع الضوئي لدى مرورها في وسط ما ، فإنه يمكن استعادة الموجة الأصلية باستخدام مرافق طور الذي يعكس هذا الشعاع ( الموجة المشوهة ) على نفسه وينفذه مرة اخرى خلال نفس الإتجاه (الشكل 10.18)



شكل (10.18) عمل مرآة مرافق الطور .

من الممكن استخدام فكرة مرافق الطور في عمل الرنان الضوئي (الفصل التاسع)، فإذا كان هذا الرنان يحتوي على وسط مشوه *distorting medium*، فيمكن استبدال احد مرآياه بمرآة مرافق الطور *conjugate mirror*، وهذا يضمن التخلص من التشوية في كل رحلة دورية (ذهابا وإيابا) بحيث تكون أنماط الرنان ذات مقدمات موجية غير مشوهة *undistorted* عند نفاذها من المرآة العادية *ordinary mirror* (الشكل 10.19).



شكل (10.19) رنان ضوئي بمرآة عادية و مرآة مرافقة الطور .

## تمارين

(10.1) استخدمت بلورة  $\text{LiNbO}_3$  (معامل انكسارها  $n = 2.2$ ) لتحويل ضوء بطول موجة فراغية  $1.3\mu\text{m}$  الى ضوء بطول موجة فراغية  $0.5\mu\text{m}$  ، وذلك باستخدام طريقة خلط الموجة الثلاثي . اذا كانت هذه الأمواج تقع في نفس المستوى ، جد طول الموجة الثالثة ( المضخة ) ، ثم اذا نقصت قدرة الموجة  $1.3\mu\text{m}$  بمقدار  $1.0\text{ mW}$  خلال التغير في المسافة  $\Delta z$  جد كسب القدرة للموجة المتحولة الى اعلى ومقدار فقد القدرة او كسب المضخة خلال هذه المسافة .

(10.2) اذا كان معامل انكسار وسط لاخطي دالة لطول موجة الضوء المار خلاله ويعطى بالعلاقة التالية  $n(\lambda_0) \approx n_0 - \xi \lambda_0$  حيث  $\lambda_0$  طول الموجة الفراغية ،  $n_0$  ،  $\xi$  ثابت. برهن ان الموجات الثلاثة  $\lambda_{01}$  ،  $\lambda_{02}$  ،  $\lambda_{03}$  والمتحركة في نفس الإتجاه لا يمكن مزاجتها بكفاءة بواسطة ظاهرة الرتبة الثانية اللاخطية .

(10.3) اشتق قانوني حفظ الطاقة وحفظ عدد الفوتونات (علاقة مانلي-روي) لحالة خلط الموجة الرباعي.

(10.4) جد تعبيراً رياضياً للشدة التكاملية لمتفرد مكاني و المعطاة في معادلة (10.3 - 10.3) ، ثم برهن ان هذه الشدة تتناسب عكسياً مع عرض الشعاع  $W_0$  ؟ .

(10.5) صمم نظاماً لتعديل طور شعاع ضوئي بطول موجة  $546\text{ nm}$  وبعرض  $w = 0.1\text{ mm}$  باستخدام خلية كيرر طولها  $L = 10\text{ cm}$  ، حيث يتم التحكم في هذا المعدل بواسطة ضوء ليزر نبضي طول موجته  $694\text{ nm}$  ، معامل انكسار مادة الخلية  $n = 1.6$  ، ومعامل اللاخطية للرتبة الثالثة  $\chi^{(3)} = 4.4 \times 10^{-32}$  . جد القدرة الضوئية  $P_\pi$  للضوء المتحكم اللازمة لتعديل الطور بمقدار  $\pi$  .

(10.6) (a) جد شدة الضوء ( $\text{watt/cm}^2$ ) التي تجعل النسبة بين الحد الثاني الى الحد الأول في معادلة (10.2) تساوي 1% في بلورة ADP ، حيث  $n = 1.5$  ،  $d = 6.8 \times 10^{-24}\text{ C/V}^2$  ، عند  $\lambda_0 = 1.06\mu\text{m}$  .

(b) جد شدة الضوء التي تجعل النسبة بين الحد الثالث الى الحد الأول في هذه المعادلة يساوي 1% لمادة ثنائي كبريتيد الكربون ( $\text{CS}_2$ ) حيث  $\chi^{(3)} = 4.4 \times 10^{-32}\text{ cm}^3/\text{V}^2$  ،  $d=0$  ،  $n = 1.6$  ، عند  $\lambda_0 = 694\text{ nm}$  ملاحظة: استخدم العلاقات التالية لإيجاد الشدة الضوئية:  $I = |\epsilon_0|^2/2\eta$  ،  $\eta = \eta_0/n$  ، (ممانعة الوسط)

$$\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377\ \Omega \text{ ، (ممانعة الفراغ) .}$$

انتهى بعون الله وبحمده

## المراجع

- (1) G.R. Fowles, *Introduction to Modern Optics*, 2<sup>nd</sup> edition, Dover Publications, Inc., New York, 1989.
- (2) J. R. Meyer - Arendt, *Introduction to classical and Modern Optics*, Prentice – Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
- (3) Born, M., and E. Wolf, *Principle of Optics*, Newark, Macmillan, 1965.
- (4) Beran, M.J., and G.B. Parrent, Jr., *Theory of Partial Coherence*, Englewood Cliffs, N.Y., Prentice – Hall, 1964.
- (5) Francon, M., *Modern Applications of Physical Optics*, New York, Wiley, 1963 .
- (6) Harnwell, G.P., *Principles of Electricity and Magnetism*, New York, McGraw- Hill, 1938 .
- (7) Herzberg, G., *Atomic Spectra*, Academic Press Molecular Structure, New York, Dover, 1962.
- (8) Kuhn, H.G., *Atomic Spectra*, Academic Press, New York, 1962.
- (9) Pearson, J.M., *A Theory of Waves*, Boston, Allyn and Bacon, 1966.
- (10) Prather, J.L., *Atomic Energy Levels in Crystals*, Washington, D.C., 1961.
- (11) Schurcliff, W.A., and S.S. Ballard, *Polarized Light*, Princeton, N.J., Van Nostrand, 1964.
- (12) Williams, W.E., *Application of Interferometry*, 4th edition, New York, Wiley, 1950.
- (13) Zernike, F., and J.E. Midwinter, *Applied Nonlinear Optics*, New York, Wiley, 1973.
- (14) Bahaa, E.A. Saleh, Maliven Carl Teich, *Fundamentals of Photonics*, John Wiley and Sons, Inc., 1991.
- (15) P.N. Butcher and D. Cotter, *Elements of Nonlinear Optics*, Cambridge University Press, New York, 1990.
- (16) A. Giordmaine, *The Interaction of Light with Light*, Scientific American, Vol.210, no. 4, 1964.

(17) Flytzamin and J.L. Ouder, eds., *Nonlinear Optics: Materials and Devices*, Springer, Berlin, 1986.

(18) G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, Boston, 1989.

(19) R.J. Bell, *Introductory Fourier Transform Spectroscopy*, Academic Press, Inc., New York, 1972.

(20) M. Smith, *Principles of Holography*, 2<sup>nd</sup> edition, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1975.

---